

Die P o i n c a r é sche Indexmethode und ihre Anwendungen
in der affinen Flächentheorie im Großen

INAUGURAL-DISSERTATION

zur

Erlangung der Doktorwürde

der

Mathematisch-Naturwissenschaftlichen Fakultät
der Freien Universität Berlin

vorgelegt von

Hans-Friedrich M ü n z n e r
aus Göttingen

1963

Druck:

ERNST-REUTER-GESELLSCHAFT
der Förderer und Freunde der Freien Universität Berlin e. V.
DISSERTATIONS-DRUCKSTELLE
1 Berlin 33, Garystr. 45

Die P o i n c a r é sche Indexmethode und ihre Anwendungen
in der affinen Flächentheorie im Großen

INAUGURAL-DISSERTATION

zur

Erlangung der Doktorwürde

der

Mathematisch-Naturwissenschaftlichen Fakultät

der Freien Universität Berlin

vorgelegt von

Hans-Friedrich M ü n z n e r

aus Göttingen

1. Referent: Professor Dr. K. P. Grotemeyer

2. Referent: Professor Dr. A. Dinghas

Tag der mündlichen Prüfung: 22. 1. 63

Tag der Promotion: **24. Juli 1963**



Erklärung des Verfassers

Kapitel I

Die Bedeutung des menschlichen Geistes für die Wissenschaften und die Kunst

1. Die Bedeutung des menschlichen Geistes für die Wissenschaften und die Kunst

Herrn Prof. Dr. med. Arist Stender
in Dankbarkeit

Kapitel II

Die Bedeutung des menschlichen Geistes für die Wissenschaften und die Kunst

2. Die Bedeutung des menschlichen Geistes für die Wissenschaften und die Kunst

3. Die Bedeutung des menschlichen Geistes für die Wissenschaften und die Kunst

4. Die Bedeutung des menschlichen Geistes für die Wissenschaften und die Kunst

5. Die Bedeutung des menschlichen Geistes für die Wissenschaften und die Kunst

6. Die Bedeutung des menschlichen Geistes für die Wissenschaften und die Kunst

7. Die Bedeutung des menschlichen Geistes für die Wissenschaften und die Kunst

8. Die Bedeutung des menschlichen Geistes für die Wissenschaften und die Kunst

9. Die Bedeutung des menschlichen Geistes für die Wissenschaften und die Kunst

Inhaltsverzeichnis

Seite

Einleitung und Zusammenfassung	7
--------------------------------	---

Kapitel I

Die Indextheorie für homogene Formen n-ten Grades auf zweidimensionalen differenzierbaren Mannigfaltigkeiten	11
--	----

§ 1 Einige Definitionen und Formeln aus der R i e m a n n schen Geometrie	11
§ 2 Algebraische Hilfssätze	13
§ 3 Die Definition des Index	19
§ 4 Einige Eigenschaften des Index	24
§ 5 Beispiele für die Berechnung des Index	29

Kapitel II

Über Sätze im Großen in der affinen Flächentheorie	51
--	----

§ 6 Die Grundformeln der radialaffinen Flächentheorie	51
§ 7 Sätze im Großen der radialaffinen Flächentheorie	53
§ 8 Die Grundformeln der äquiaffinen Flächentheorie	57
§ 9 Einige Kennzeichnungen des Ellipsoids	61
§ 10 Eine Starrheitseigenschaft des Ellipsoids	64
§ 11 Die Anwendung eines Satzes von M i n k o w s k i in der affinen Geometrie	67
§ 12 Einfache Beweise des Satzes von M i n k o w s k i und verwandter Ergebnisse	69
§ 13 Abschließende Bemerkungen	71

Literatur	73
-----------	----

Einleitung und Zusammenfassung

Bei vielen Ergebnissen der globalen Differentialgeometrie handelt es sich um Eindeutigkeitssätze für geschlossene Flächen. Als Beispiele seien der C o h n - V o s s e n -sche Satz über die Kongruenz isometrischer Eiflächen und die L i e b m a n n schen Kennzeichnungen der Kugeln als Eiflächen mit konstanter mittlerer oder G a u ß scher Krümmung genannt. Der Reiz derartiger Resultate besteht darin, daß die differentialgeometrischen Voraussetzungen keineswegs hinreichen, ein Flächenstück etwa bis auf Bewegungen festzulegen; bei den Beweisen geht wesentlich die topologische Gestalt der Fläche ein.

Eine Methode für die Herleitung von Eindeutigkeitssätzen im Großen, die zum ersten Mal von C o h n - V o s s e n verwendet wurde, beruht auf der Untersuchung von stetigen Kurvenscharen auf zweidimensionalen Mannigfaltigkeiten. Man kann den topologischen Charakter einer isolierten Singularität der Kurvenschar K durch eine Zahl, den sogenannten Index, roh beschreiben; ein Satz von P o i n c a r é besagt nun: Ist die Mannigfaltigkeit M geschlossen, und ist K nur in endlich vielen Stellen von M nicht regulär, so ergibt sich die E u l e r sche Charakteristik von M als Summe der Indizes aller Singularitäten von K .

Die übliche Anwendung des P o i n c a r é schen Resultates auf Fragen der globalen Flächentheorie gestaltet sich nun folgendermaßen: Die Lösung des gegebenen geometrischen

Problems ist gleichbedeutend mit dem Nachweis, daß eine gewisse auf einer geschlossenen Mannigfaltigkeit gegebene quadratische Differentialform α dort überall verschwindet. Man zeigt nun, daß die Nulllinien von α andernfalls ein reelles in zwei Kurvenscharen zerfallendes Netz bilden würden, das nur isolierte Singularitäten besitzt, und durch die Untersuchung der auftretenden Indizes gelangt man zu einem Widerspruch zum P o i n c a r é schen Satz¹⁾.

In der vorliegenden Arbeit werden unter anderem ähnliche Schlußweisen im Rahmen der affinen Flächentheorie für kubische Differentialformen durchgeführt. Das erste Kapitel ist der Darstellung einer Indextheorie für in reelle Linearfaktoren zerfallende Formen

$$\alpha = A_{i_1 \dots i_n} du^{i_1} \dots du^{i_n} \quad 2) \quad (i_\nu = 1, 2; \nu = 1, \dots, n)$$

auf zweidimensionalen Mannigfaltigkeiten gewidmet. Dabei wird der Index ohne Rückgriff auf das Gewebe der Nulllinien von α , das sich ja im allgemeinen in der Umgebung einer Singularität nicht in Kurvenscharen zerlegen läßt, durch die Integralformel (3.4) eingeführt, die eine unmittelbare Zurückführung des P o i n c a r é schen Satzes (§ 4, D) auf die bekannte Tatsache ermöglicht, daß die curvatura integra einer geschlossenen zweidimensionalen R i e - m a n n schen Mannigfaltigkeit gleich dem 2π -fachen ihrer E u l e r schen Charakteristik ist. Die Darstellung ist

1) vgl. [6], [11], [12], [13]

2) Wir verwenden die Einsteinsche Summenkonvention, nach der über oben und unten auftretende Indizes summiert wird.

allgemeiner, als es die differentialgeometrischen Anwendungen in Kapitel II erfordern. Bei diesen wird die Indexmethode fast nur für Formen benötigt, deren Koeffizienten der Bedingung

$$g^{ik} A_{iki_3 \dots i_n} = 0$$

mit einem definiten Tensor (g^{ik}) genügen. Von Kapitel I sind daher für das Folgende hauptsächlich die Paragraphen 1 und 5, aus § 3 die Formeln (3.1 - 4) und aus § 4 die Eigenschaften A - D wichtig.

Die Anwendungen auf die affine Differentialgeometrie sind zusammen mit je einem Abriß des Formelapparates der radialaffinen und der äquiaffinen Flächentheorie in Kapitel II dargestellt. Es werden mehrere Sätze über die Kennzeichnung des Ellipsoids, die bisher mit anderen und unterschiedlichen Hilfsmitteln gezeigt wurden, einheitlich unter Benutzung der Indexmethode bewiesen und durch neue Resultate ergänzt. Von diesen sei das folgende Ergebnis besonders hervorgehoben: Unter den analytischen Eiflächen sind die Ellipsoide mit vorgegebenem Mittelpunkt O allein durch die quadratische Fundamentalform der radialaffinen Flächentheorie bezüglich O gekennzeichnet (Satz 2). Andere Resultate entsprechen den von C h e r n u n d H o p f angegebenen Verallgemeinerungen der anfangs erwähnten L i e b - m a n n schen Sätze³⁾, wie Satz 5', oder erweitern in ähnlicher Weise die B l a s c h k e sche Kennzeichnung der

3) vgl. [5], [10], [12]

Ellipsoide als der einzigen geschlossenen Affinsphären, wie die Sätze 1' und 4'.

Alle diese Ergebnisse erscheinen als einfache Folgerungen der Sätze von § 5, in denen die Singularitäten gewisser Differentialformen untersucht werden. Wenn sich hierbei auch kein allgemeiner Satz herauskristallisiert, der alle anderen enthält, so sind doch die Analogien in den Voraussetzungen und in der Behandlung offensichtlich.

Kapitel I

Die Indextheorie für homogene Formen n-ten Grades auf zweidimensionalen differenzierbaren Mannigfaltigkeiten

§ 1 Einige Definitionen und Formeln aus der Riemannschen Geometrie

Es sei M eine zweidimensionale Mannigfaltigkeit der Klasse C^3 ; u^i ($i = 1, 2$) seien lokale Parameter auf M . Durch die Auszeichnung eines symmetrischen positiv definiten kovarianten Tensorfeldes g_{ik} ⁴⁾ der Klasse C^2 wird M zu einem Riemannschen Raum; die Operationen des Hebens und Senkens von Indizes und der kovarianten Differentiation sind definiert. Für ein Tensorfeld $A_{k_1 \dots k_n}^{l_1 \dots l_m}$ bezeichnen wir mit $A_{k_1 \dots k_n}^{l_1 \dots l_m} | i$ die kovariante und mit $A_{k_1 \dots k_n}^{l_1 \dots l_m} | i$ die partielle Ableitung nach u^i . Bei Skalaren lassen wir die Striche vor dem Index der Ableitung weg.

Durch $\varepsilon_{11} = \varepsilon_{22} = 0$ und $\varepsilon_{12} = -\varepsilon_{21} = |\sqrt{\det(g_{ik})}|$ wird der sogenannte Diskriminantentensor ε_{ik} eingeführt; ε_{ik} verhält sich jedoch nur gegenüber orientierungstreuen Koordinatentransformationen wie ein Tensor. Es gilt die folgende Identität:

4) Wie vielfach üblich, bringen wir den begrifflichen Unterschied zwischen dem Schema der Tensorkomponenten und dem dadurch repräsentierten Tensor in der Notation nicht zum Ausdruck.

$$(1.1) \quad \varepsilon_{ik} \varepsilon_{\ell m} = g_{i\ell} g_{km} - g_{im} g_{k\ell} .$$

Der zu A_{ik} adjungierte Tensor ist durch

$$\underline{A}^{ik} = \varepsilon^{i\alpha} \varepsilon^{k\beta} A_{\alpha\beta}$$

gegeben; es gilt

$$\underline{A}^{ik} A_{ik} = 2 \det (A_i^{\ell}) .$$

Wir notieren das Lemma von R i c c i :

$$g_{ik} \parallel \ell = 0, \quad \varepsilon_{ik} \parallel \ell = 0 .$$

Der von g_{ik} induzierte Krümmungstensor besitzt die Gestalt:

$$R_{ijkl} = S \varepsilon_{ij} \varepsilon_{kl} ;$$

dabei ist S der Krümmungsskalar von g_{ik} .

Für einen n-stufigen, kovarianten Tensor lauten die Integrabilitätsbedingungen

$$(1.2) \quad \varepsilon^{kl} A_{j_1 \dots j_n} \parallel \ell \parallel k = \sum_{\nu} S \varepsilon_{j_{\nu}}^m A_{j_1 \dots j_{\nu-1} m j_{\nu+1} \dots j_n} .$$

Nun sei M orientiert und G ein stückweise glattberandetes Gebiet auf M. Der Durchlaufungssinn des Randes ∂G sei so gewählt, daß $\varepsilon_i^k \dot{u}^i(s)$ ins Innere von G weist, wenn $u^i(s)$ die Darstellung eines glatten Randstücks ist. Dann gilt für ein Vektorfeld a_k der Klasse C^1 die Formel von S t o k e s

$$(1.3) \quad \int_G \varepsilon^{ik} a_{k \parallel i} do = \int_{\partial G} a_k \dot{u}^k ds \quad (do = \varepsilon_{12} du^1 du^2) .$$

Ist M geschlossen, so besteht eine wichtige Beziehung zwischen der topologischen Gestalt von M, gegeben durch die E u l e r sche Charakteristik χ , und der R i e m a n n - schen Metrik:

$$(1.4) \quad \int_M S do = 2\pi \chi .$$

Nach L i c h t e n s t e i n ist es möglich, isotherme Parameter einzuführen, d. h. eine Koordinatentransformation so vorzunehmen, daß $g_{ik} = h \delta_{ik}$ wird. Wenn die Skalarkrümmung S konstant ist, so kann h in der nach R i e m a n n benannten Gestalt

$$(1.5) \quad h = (1 + \frac{1}{4} S \delta_{ik} u^i u^k)^{-2}$$

angesetzt werden⁵⁾.

§ 2 Algebraische Hilfssätze

Für die Berechnung des Index eines Feldes homogener Formen in einer isolierten Singularität und die Herleitung seiner Eigenschaften ist es zweckmäßig, das vorgegebene Feld durch ein verwandtes aber einfacher gebautes zu ersetzen; man geht hier ähnlich vor wie bei Kurvennetzen, bei denen man zur Untersuchung der Singularitäten die Netze der Winkelhalbierenden heranziehen kann.

In diesem Paragraphen werden algebraische Hilfssätze, die für derartige Konstruktionen nützlich sind, zusammengestellt.

Es sei $R[x^1, x^2]$ der Polynomring über dem Körper R der reellen Zahlen mit den Unbestimmten x^i ($i = 1, 2$). Mit S_n bezeichnen wir den Vektorraum der homogenen Polynome n -ten Grades in den x^i , mit L_n die Menge der Elemente aus S_n , die

5) vgl. [7], S. 85.

in reelle Linearfaktoren zerfallen; L sei die Vereinigung aller L_n . Bei Benutzung der Einsteinschen Konvention läßt sich ein Element aus S_n in der Form

$$\alpha = A_{i_1 \dots i_n} x^{i_1} \dots x^{i_n} \quad (i_\nu = 1, 2; \nu = 1, \dots, n)$$

schreiben; dabei werde das Koeffizientenschema $A_{i_1 \dots i_n}$ als symmetrisch in allen Indizes vorausgesetzt. Wir verwenden den im Tensorkalkül gebräuchlichen Prozeß des Hebens von Indizes bezüglich einer positiv definiten quadratischen Form $y = g_{ik} x^i x^k$ und setzen

$$(2.1) \quad \Delta_y \alpha = g^{ik} \frac{\partial^2 \alpha}{\partial x^i \partial x^k} = n(n-1) g^{ik} A_{ikj_3 \dots j_n} x^{j_3} \dots x^{j_n}.$$

Mit T_{y_n} bezeichnen wir die Menge der Elemente β aus S_n mit

$$(2.2) \quad \Delta_y \beta = 0.$$

T_y sei die direkte Summe der Vektorräume T_{y_n} ($n \geq 0$).

Die Elemente aus T_{y_n} erhalten eine besonders einfache Gestalt, wenn man eine lineare Substitution $x^i = T_j^i y^j$ ausführt, so daß

$$(2.3) \quad y = h \delta_{ik} y^i y^k$$

wird. Setzt man nämlich $z = y^1 + i y^2$ ($i^2 = -1$), so kann man schreiben:

$$(2.4) \quad \Delta_y \alpha = \frac{4}{h} \frac{\partial^2 \alpha}{\partial z \partial \bar{z}} \quad (\bar{z} = y^1 - i y^2),$$

und aus (2.2) folgt

$$(2.5) \quad \beta = B_{j_1 \dots j_n} y^{j_1} \dots y^{j_n} = \bar{b} z^n + b \bar{z}^n$$

mit $b = \frac{1}{2} (B_{11 \dots 1} + i B_{21 \dots 1})$, wie man durch Koeffizientenvergleich sieht. Nun sei $\beta' = \bar{b}' z^m + b' \bar{z}^m$ aus T_{y_m} und r aus R .

Dehnt man die durch

$$(2.6) \quad \begin{aligned} \beta \circ \beta' &= \bar{b} \bar{b}' z^{n+m} + b b' \bar{z}^{n+m} \\ r \circ \beta &= r \beta \end{aligned}$$

gegebene assoziative und kommutative Produktbildung "o" durch Postulierung eines zweiseitigen Distributivgesetzes auf ganz T_Y aus, so wird T_Y zu einem Ring.

Im folgenden Hilfssatz sind gewisse einfache Beziehungen zwischen $R[x^1, x^2]$, L und T_Y formuliert.

Hilfssatz 1a) T_{Y_n} ist in L_n enthalten.

b) Es gibt genau eine Abbildung τ_Y von $R[x^1, x^2]$ auf T_Y mit

$$(2.7) \quad \tau_Y \varphi = \varphi(Y) \quad (\varphi \in R[x^1, x^2]).$$

c) Es gilt

$$(2.8) \quad \tau_Y(\lambda\varphi + \mu\psi) = \lambda \tau_Y \varphi + \mu \tau_Y \psi$$

$$(2.9) \quad \tau_Y(\varphi\psi) = (\tau_Y \varphi) \circ (\tau_Y \psi),$$

d. h. τ_Y ist ein Ringhomomorphismus; den Kern von τ_Y bildet das von Y erzeugte Hauptideal (Y) .

d) Für ein von Null verschiedenes Element α aus L gilt auch $\tau_Y \alpha \neq 0$.

Beweis des Hilfssatzes: Das Element β aus T_{Y_n} besitze die Gestalt (2.5) mit $b = i l b l e^{i\theta}$. Dann sind durch

$$y^1 = \cos \frac{1}{n} (2m\pi + \vartheta), \quad y^2 = \sin \frac{1}{n} (2m\pi + \vartheta) \quad (m = 0, \dots, n-1)$$

n paarweise linear unabhängige reelle Nullstellen gegeben, und damit ist a) gezeigt.

Wir definieren nun die Abbildung τ_y zunächst nur für homogene Polynome und setzen sie dann linear auf ganz $R[x^1, x^2]$ fort. Für α aus S_n sei τ_y durch

$$(2.10) \quad \tau_y \alpha = \sum_{m=0}^{n-1} c_{m,n} y^m \Delta_y^m \alpha$$

gegeben, wobei $c_{0,n} = 1$, $\Delta_y^0 \alpha = \alpha$ und dann rekursiv

$$c_{m,n} = -\frac{1}{4m(n-m)} c_{m-1,n}, \quad \Delta_y^m \alpha = \Delta_y (\Delta_y^{m-1} \alpha).$$

Es gilt $\tau_y \alpha = \alpha(y)$; die Gleichung $\Delta_y (\tau_y \alpha) = 0$ folgt unmittelbar aus der für δ aus S_{n-2m} gültigen Identität

$$\Delta_y (y^m \delta) = 4m(n-m) y^{m-1} \delta + y^m \Delta_y \delta,$$

die man bei Beachtung von (2.3) und 2.4) leicht beweist.

Jetzt sei $\hat{\tau}_y$ eine weitere Abbildung von $R[x^1, x^2]$ in T_y , die der Kongruenz (2.7) genügt. Dann liegt das Polynom $\tau_y \alpha - \hat{\tau}_y \alpha$ sowohl im Ideal (y) als auch in T_y und damit in L .

Da der Durchschnitt von (y) und L nur aus der Null besteht, folgt wegen a) $\tau_y = \hat{\tau}_y$. Damit ist b) bewiesen.

Die Linearität der Abbildung τ_y ergibt sich direkt aus ihrer Definition (2.10). Nun gelte $\alpha \in S_n$, $\alpha' \in S_m$, $\beta = \tau_y \alpha$, $\beta' = \tau_y \alpha'$. Aus (2.10) ersieht man

$$\beta \beta' = \alpha \alpha' (y)$$

und aus (2.5) folgt wegen $y = h z \bar{z}$

$$\beta \circ \beta' = \beta \beta' (y).$$

Also gilt wegen b)

$$\tau_y (\alpha \alpha') = \tau_y (\beta \beta') = \beta \circ \beta'$$

und damit (2.7). Die Behauptung d) folgt aus b). Damit ist der Hilfssatz 1 bewiesen.

Der nächste Hilfssatz befaßt sich mit Möglichkeiten, aus Elementen von L weitere in L gelegene Elemente zu konstruieren. Er ist die Beweisgrundlage für Kap. I, § 4, F.

Hilfssatz 2 Es seien $\alpha = A_{i_1 \dots i_n} x^{i_1} \dots x^{i_n}$ und $\beta = B_{i_1 \dots i_m} x^{i_1} \dots x^{i_m}$ ($m < n$), von Null verschiedene Elemente aus L , und die quadratische Form $\mathfrak{g} = P_{ik} x^i x^k$ sei positiv definit. Dann liegen die Polynome

$$\begin{aligned} \text{a)} \quad \delta &= P_{i_1}^2 A_{i_1 i_2 \dots i_n} x^{i_1} \dots x^{i_n}, \\ \text{b)} \quad \eta &= A_{i_1 \dots i_n} B_{i_1 \dots i_m} x^{i_{m+1}} \dots x^{i_n} \end{aligned}$$

wieder in L ; außerdem gilt $\delta \neq 0$, und $\eta \neq 0$ ist sicher dann erfüllt, wenn α durch mindestens $m+1$ paarweise linear unabhängige Linearformen teilbar ist.

Beweis von Hilfssatz 2: Der Beweis der obigen Behauptungen beruht darauf, daß man δ und η durch geeignete Differentiationen aus α gewinnen und den Satz von Rolle anwenden kann.

Zunächst zeigen wir, daß δ in L liegt, d. h. in reelle Linearfaktoren zerfällt. Dazu üben wir wieder eine lineare

Substitution $x^i = T_j^i y^j$ aus, so daß

$$y = \delta_{ik} y^i y^k,$$

$$\varphi = p_1 (y^1)^2 + p_2 (y^2)^2 \quad (p_1 \geq p_2 > 0)$$

wird. Dann gilt

$$(2.11) \quad n\delta = p_1 y^1 \frac{\partial \alpha}{\partial y^1} + p_2 y^2 \frac{\partial \alpha}{\partial y^2}.$$

Für $p_1 = p_2$ ist die Behauptung a) wegen $\delta = p_1 \alpha$ richtig.

Es sei also $p_1 \neq p_2$. Wir stellen α und δ in der Form

$$\alpha = \alpha(y^1, y^2) = (y^1)^{r_1} (y^2)^{r_2} \hat{\alpha}(y^1, y^2),$$

$$\delta = \delta(y^1, y^2) = (y^1)^{q_1} (y^2)^{q_2} \hat{\delta}(y^1, y^2)$$

dar, wobei die Polynome $\hat{\alpha}$ und $\hat{\delta}$ weder durch y^1 noch durch y^2 teilbar seien; außerdem setzen wir

$$h_k(t) = \alpha(e^{p_1 t}, (-1)^k e^{p_2 t}) \quad (k=1,2).$$

Dann gilt, wie man aus (2.11) leicht ersieht, $r_i = q_i$ ($i=1,2$)

und

$$(2.12) \quad \text{sign } \hat{\alpha}(\pm 1, 0) = \text{sign } \hat{\delta}(\pm 1, 0) \neq 0,$$

$$\text{sign } \hat{\alpha}(0, \pm 1) = \text{sign } \hat{\delta}(0, \pm 1) \neq 0$$

und

$$h'_k(t) = \frac{dh_k}{dt} = n\delta(e^{p_1 t}, (-1)^k e^{p_2 t}) \quad (k=1,2).$$

Nun bezeichnen wir mit n_k und n'_k die mit ihren Vielfachheiten gezählten reellen Nullstellen von $h_k(t)$ und $h'_k(t)$.

Aus dem Satz von Rolle folgt $n'_k \geq n_k - 1$ und, da wegen (2.12) für großes $|t|$ $\text{sign } h_k(t) = \text{sign } h'_k(t)$ ist, gilt auch $n'_k \equiv n_k$ (2). Berücksichtigt man noch die Gleichungen

$$(2.13) \quad n_1 + n_2 + r_1 + r_2 = n,$$

$$(2.14) \quad n'_1 + n'_2 + r_1 + r_2 \leq n,$$

so erhält man $n'_k = n_k$; also gilt in (2.14) das Gleichheitszeichen, womit a) gezeigt ist.

Jetzt untersuchen wir das Polynom η . Da β aus L ist, existiert eine reelle Zerlegung

$$\beta = \prod_{\nu} b_{i_{\nu}} x^{i_{\nu}};$$

aus der Symmetrie von $A_{i_1 \dots i_n}$ folgt dann

$$(2.15) \quad A_{i_1 \dots i_n} B^{i_1 \dots i_m} = A_{i_1 \dots i_n} b^{i_1} \dots b^{i_m},$$

so daß wir nur den Fall $m = 1$ zu betrachten brauchen. Wir setzen $x^i = s B^i + t C^i$, wobei B^i und C^i linear unabhängig seien. Nach dem Satz von R o l l e zerfällt dann mit α auch das Polynom

$$\frac{1}{n} \frac{\partial \alpha}{\partial s} = A_{i_1 \dots i_n} B^{i_1} x^{i_2} \dots x^{i_n}$$

in reelle Linearfaktoren. Außerdem gilt: Wird α durch r ($r \geq 2$) paarweise linear unabhängige Linearformen geteilt, dann ist mit α auch $\frac{\partial \alpha}{\partial s}$ von Null verschieden und wird von mindestens $r - 1$ paarweise linear unabhängigen Linearformen geteilt. Wegen (2.15) erhält man durch wiederholte Anwendung dieses Resultats die Behauptungen des Hilfssatzes über η .

§ 3 Die Definition des Index

In diesem Paragraphen untersuchen wir auf M definierte Felder homogener Formen, die nur an endlich vielen Stellen singular⁶⁾ werden, d.h. verschwinden oder nicht definiert

6) Gegensatz: regulär

sind. Sie haben die Gestalt

$$\alpha = A_{i_1 \dots i_n} du^{i_1} \dots du^{i_n},$$

wobei die $A_{i_1 \dots i_n}$ Komponenten eines symmetrischen Tensorfeldes sind. Wir sagen, α gehöre zur Klasse C^m , wenn das Tensorfeld $A_{i_1 \dots i_n}$ von der Klasse C^m ist.

Die im vorigen Paragraphen für Formen entwickelten Definitionen und Hilfssätze lassen sich in natürlicher Weise auf Felder übertragen. So bezeichnen wir α als L-Feld bzw. als T_γ -Feld, wenn α in jedem Punkt von M in Linearfaktoren zerfällt bzw. der Bedingung $g^{ik} A_{ik i_3 \dots i_n} = 0$ genügt, wobei $\gamma = g_{ik} du^i du^k$ ist. Nach Hilfssatz 1 b) und d) gibt es eine Abbildung τ_γ , die jedem L-Feld α ein T_γ -Feld zuordnet, so daß α und $\tau_\gamma \alpha$ die Singularitäten gemeinsam haben; ist α von der Klasse C^k und γ von der Klasse C^ℓ , so ist wegen (2.10) $\tau_\gamma \alpha$ von der Klasse C^m mit $m = \min(k, \ell)$.

Der Index eines T_γ -Feldes

Es sei $\beta = B_{i_1 \dots i_n} du^{i_1} \dots du^{i_n}$ ein T_γ -Feld der Klasse C^0 . Bei Einführung isothermer Parameter gewinnen wir in einer Koordinatenumgebung V aus M nach (2.5) eine Darstellung

$$(3.1) \quad \beta = 2 \operatorname{Re}(\bar{b}(dw)^n).$$

Dabei ist $w = u^1 + iu^2$ und $b = \frac{1}{2} (B_{11 \dots 1} + i B_{21 \dots 1})$ eine stetige Funktion von w . Nun sei G eine offene Menge, deren abgeschlossene Hülle $\bar{G}$ ganz in V gelegen und kompakt ist. $\bar{G}$ werde durch endlich viele geschlossene Kurven C_ν berandet, auf denen β regulär ist. Die ganze Zahl

$$(3.2) \quad J(G, \beta) = \frac{1}{2\pi} \sum_{\gamma} \int_{C_{\gamma}} d \arg b$$

heißt dann der Index von G in bezug auf das Feld β . Unmittelbar aus (2.5) folgt

$$(3.3) \quad J(G, \beta \circ \beta') = J(G, \beta) + J(G, \beta'),$$

wenn auch β' auf den Kurven C_{γ} regulär ist.

Wir geben jetzt dem Index eine von der Koordinatenwahl unabhängige Integraldarstellung, die viele seiner Eigenschaften deutlich hervortreten läßt. Dabei setzen wir allerdings zusätzlich voraus, daß die C_{γ} stückweise glatt sind und daß β von der Klasse C^1 ist, Forderungen, die bei den differentialgeometrischen Anwendungen ohnehin erfüllt sind. Wir behaupten

$$(3.4) \quad J(G, \beta) = \frac{1}{2\pi} \sum_{\gamma} \int_{C_{\gamma}} \frac{\varepsilon^{i_1 \dots i_n} B_{i_1 \dots i_n} \frac{D}{ds} B_{i_1 \dots i_n}}{B_{i_1 \dots i_n} B_{i_1 \dots i_n}} ds + n \int_G S d\sigma^7).$$

Dabei bezeichne $\frac{D}{ds}$ die kovariante Ableitung längs $u^i(s)$.

Zum Beweis von (3.4) betrachten wir ein auf $\bar{G}$ reguläres T_{γ} -Feld $M_{i_1 \dots i_n} du^{i_1} \dots du^{i_n}$ der Klasse C^2 . Der Tensor

$$N_{i_1 \dots i_n} = \varepsilon_{i_1}^k M_{k i_2 \dots i_n}$$

ist wegen

$$\varepsilon^{i_2 i_1} N_{i_1 \dots i_n} = g^{k i_2} M_{k i_2 \dots i_n} = 0$$

symmetrisch (für $n \geq 2$); es gilt also nach (1.2)

$$(3.5) \quad \varepsilon^{i_1 k} M_{i_1 \dots i_n n \parallel k} = n S N_{i_1 \dots i_n}.$$

Wendet man nun den Stokesschen Satz (1.2) auf den Vektor

$\alpha_k = N_{i_1 \dots i_n} M_{i_1 \dots i_n n \parallel k}$ an, so erhält man bei Berücksichtigung von (3.5) die Integralformel

7) Für $n = 1$ verdanke ich diese Formel einer mündlichen Mitteilung von Herrn Grottemeyer.

$$(3.6) \quad \int_G \varepsilon^{ik} N^{j_1 \dots j_n} M_{j_1 \dots j_n} \parallel k \, do$$

$$= \sum_{\nu} \int_{C_{\nu}} N^{j_1 \dots j_n} \frac{D}{ds} M_{j_1 \dots j_n} ds + n \int_G S M_{j_1 \dots j_n} M^{j_1 \dots j_n} do.$$

Jetzt sei

$$(3.7) \quad M_{i_1 \dots i_n} M^{i_1 \dots i_n} = 1.$$

Dann gilt auch

$$(3.8) \quad M^{i_1 \dots i_n} M_{i_1 \dots i_n} \parallel k = 0 = N^{i_1 \dots i_n} N_{i_1 \dots i_n} \parallel k.$$

Aus (3.8) und

$$(3.9) \quad M^{i_1 \dots i_n} N_{i_1 \dots i_n} = 0$$

folgen, da $T_{\gamma n}$ ein zweidimensionaler reeller Vektorraum ist (vgl. (2.5)), Darstellungen der Form

$$M_{i_1 \dots i_n} \parallel \ell = h_{\ell} N_{i_1 \dots i_n}, \quad N_{i_1 \dots i_n} \parallel \ell = -h_{\ell} M_{i_1 \dots i_n},$$

und daraus ergibt sich

$$(3.10) \quad \varepsilon^{ik} N^{j_1 \dots j_n} M_{j_1 \dots j_n} \parallel k = -M^{j_1 \dots j_n} N_{j_1 \dots j_n} \varepsilon^{ik} h_i h_k = 0$$

und

$$(3.11) \quad \frac{D}{ds} M_{i_1 \dots i_n} = \alpha(s) N_{i_1 \dots i_n}$$

$$\frac{D}{ds} N_{i_1 \dots i_n} = -\alpha(s) M_{i_1 \dots i_n} \quad (\alpha(s) = h_{\ell} \frac{du^{\ell}}{ds}).$$

für die Punkte eines glatten Kurvenstückes $u^i(s)$.

Bei Beachtung von (3.10) und (3.11) geht (3.6) über in die Integralformel

$$(3.12) \quad \sum_{\nu} \int_{C_{\nu}} \alpha ds + n \int_G S do = 0.$$

Jetzt setzen wir

$$B_{i_1 \dots i_n} = B (M_{i_1 \dots i_n} \cos \omega + N_{i_1 \dots i_n} \sin \omega)$$

$$B = (B_{i_1 \dots i_n} B^{i_1 \dots i_n})^{\frac{1}{2}}.$$

Berücksichtigt man (3.11), so erhält man längs eines glatten Kurvenstückes, auf dem $B \neq 0$ gilt,

$$\frac{D}{ds} B_{i_1 \dots i_n} = \frac{dB}{ds} B^{-1} B_{i_1 \dots i_n} + (\dot{\omega} + \alpha) \varepsilon_{i_1}^j B_{j i_2 \dots i_n}$$

und daraus

$$(3.12) \quad \varepsilon^{j l} B_j^{i_2 \dots i_n} \frac{D}{ds} B_{l i_2 \dots i_n} = (\alpha + \dot{\omega}) B^2.$$

Aus (3.11) und (3.12) folgt

$$(3.13) \quad \sum_{\gamma} \int_{C_{\gamma}} \dot{\omega} ds = \sum_{\gamma} \int_{C_{\gamma}} \varepsilon^{j l} B_j^{i_2 \dots i_n} \frac{D}{ds} B_{l i_2 \dots i_n} B^{-2} ds + n \int_G S do.$$

Nun wähle man wieder isotherme Parameter. Durch

$$M_{i_1 \dots i_n} du^{i_1} \dots du^{i_n} = 2^{\frac{1-n}{2}} h^{\frac{n}{2}} \operatorname{Re}(dw)^n$$

ist dann ein in V reguläres T_{γ} -Feld gegeben; es gilt außerdem (3.7). Weiter wird $dw = d \arg b$ (vgl. (3.1)), und damit ist (3.4) gezeigt.

Führt man $J(G, \beta)$ durch die Formel (3.4) ein, so kann die Voraussetzung, daß $\bar{G}$ eine einheitliche Koordinatenbeschreibung gestattet, fallengelassen werden.

Der Index eines L-Feldes

Jetzt sei α ein L-Feld der Klasse C^1 , das auf dem Rand von G regulär ist. Da α und $\tau_{\gamma} \alpha$ an denselben Stellen singular werden, ist $J(G, \tau_{\gamma} \alpha)$ wohldefiniert. Wir wollen zeigen, daß diese Zahl nur von G und α , nicht aber von der vorgegebenen Fundamentalform γ abhängt. Dazu betrachten wir auf M eine beliebige positiv definite quadratische Form der Klasse C^2 : $\hat{\gamma} = \hat{\gamma}_{ik} du^i du^k$; mit γ und $\hat{\gamma}$ sind auch alle Formen der Schar $\gamma(t) = (1-t)\gamma + t\hat{\gamma}$ ($0 \leq t \leq 1$) von der Klasse C^2 und positiv definit. Wir bilden die Funktion $f(t) = J(G, \tau_{\gamma(t)} \alpha)$, indem wir in Formel (3.4) die kovariante Differentiation, das Heben und Senken der Indizes, den ε -Tensor, den

Krümmungsskalar und die Differentiale ds und do auf $\gamma(t)$ beziehen. Sie ist stetig; da sie nur ganzzahlige Werte annehmen kann, ist sie konstant. Die Zahl

$$J(G, \alpha) = J(G, \tau, \alpha) = J(G, \tau, \alpha)$$

heißt der Index von G bezüglich α .

§ 4 Einige Eigenschaften des Index

G sei wieder eine offene Menge der Mannigfaltigkeit M , $\bar{G}$ kompakt und der Rand von G stückweise glatt. Außerdem seien α und α' L -Felder der Klasse C^1 , die auf dem Rande von G regulär sind.

Aus der Integraldarstellung (3.4) folgt unmittelbar eine Additivitätseigenschaft des Index:

A. Ist $\bar{G} = \bigcup \bar{G}_\nu$, wobei die G_ν paarweise disjunkte offene Mengen sind, auf deren stückweise glatten Rändern α regulär ist, so gilt

$$J(G, \alpha) = \sum_\nu J(G_\nu, \alpha).$$

Weiter ergibt sich aus der Ganzzahligkeit von $J(G, \alpha)$:

B. Ist $\alpha(t)$ ($0 \leq t \leq 1$) eine stetige Schar von L -Feldern der Klasse C^1 , und wird $\alpha(t)$ für jedes t auf ∂G nicht singulär,

so gilt

$$J(G, \alpha(0)) = J(G, \alpha(1)).$$

Insbesondere gilt also $J(G, \lambda\alpha) = J(G, \alpha)$, wenn die stetig differenzierbare skalare Funktion λ auf ∂G nirgends verschwindet.

C. Besitzt α in $\bar{G}$ keine singulären Stellen, so ist

$$J(G, \alpha) = 0.$$

Wegen A. kann beim Beweis von C. vorausgesetzt werden, daß $\bar{G}$ ganz in einer Koordinatenumgebung liegt. Wir approximieren $\tau_{\gamma}\alpha$ so durch ein T_{γ} -Feld $\hat{\mu} = \hat{M}_{i_1 \dots i_n} du^{i_1} \dots du^{i_n}$ der Klasse C^2 , daß $(1-t)\tau_{\gamma}\alpha + t\hat{\mu}$ ($0 \leq t \leq 1$) nirgends in $\bar{G}$ verschwindet. Das ist bei Benutzung etwa des Weierstraßschen Approximationssatzes möglich. Dann setzen wir

$$\mu = (\hat{M}_{j_1 \dots j_n} \hat{M}^{j_1 \dots j_n})^{-1/2} \hat{\mu} = M_{i_1 \dots i_n} du^{i_1} \dots du^{i_n}.$$

$M_{i_1 \dots i_n}$ ist in $\bar{G}$ nirgends gleich Null, von der Klasse C^2 und genügt der Gleichung (3.7). Aus (3.4) und B. folgt

$$J(G, \alpha) = J(G, \hat{\mu}) = J(G, \mu) = 0.$$

Aus C. ergibt sich, daß alle stückweise glatt berandeten Gebiete G_p , die nur die eine Singularität P besitzen und auf deren Rand α regulär ist, denselben Index haben. Die Zahl

$$J(P, \alpha) = J(G_p, \alpha)$$

heißt der Index von P bezüglich α .

Die im folgenden zu formulierende Eigenschaft des Index stellt eine wichtige Beziehung zwischen der topologischen

Gestalt einer geschlossenen Mannigfaltigkeit und den lokalen Eigenschaften eines L-Feldes dar. Sie folgt unmittelbar aus A. und den Gleichungen (1.4) und (3.4).

D. (Satz von Poincaré) Die geschlossene orientierbare Mannigfaltigkeit M sei von der Klasse C^3 und besitze die Eulersche Charakteristik χ ; das auf M definierte L-Feld α der Klasse C^1 habe nur die isolierten Singularitäten P_ν ($\nu = 1, \dots, r$). Dann gilt, wenn n der Grad der Form α ist,

$$\sum_{\nu=1}^r J(P_\nu, \alpha) = J(M, \alpha) = n\chi.$$

Hieraus ergibt sich insbesondere, daß auf einer geschlossenen Mannigfaltigkeit mit $\chi \neq 0$ jedes L-Feld Singularitäten besitzt.

Jetzt folgen noch einfache Eigenschaften des Index bei zusammengesetzten Feldern.

E. Für zwei auf ∂G reguläre L-Felder α und α' gilt

$$J(G, \alpha\alpha') = J(G, \alpha) + J(G, \alpha').$$

In der Tat ist nach Hilfssatz 1 c) und Formel (3.3):

$$\begin{aligned} J(G, \tau_\gamma(\alpha\alpha')) &= J(G, \tau_\gamma\alpha \cdot \tau_\gamma\alpha') \\ &= J(G, \tau_\gamma\alpha) + J(G, \tau_\gamma\alpha'). \end{aligned}$$

F. Es seien α und β auf ∂G reguläre L-Felder der Klasse C^1 ; weiter sei α vom Grade n und β vom Grade m ($n > m$). In jedem Punkt von ∂G zerfalle α (bzw. β) in n (bzw. m) paarweise linear unabhängige Linearfaktoren. Dann ist auch

$$\eta = A_{i_1 \dots i_n} B^{i_1 \dots i_m} du^{i_{m+1}} \dots du^{i_n}$$

ein auf ∂G reguläres L-Feld, und es gilt

$$(4.1) \quad J(G, \eta) = J(G, \alpha) - J(G, \beta).$$

Beweis: Daß η ein L-Feld und auf ∂G regulär ist, folgt unmittelbar aus Hilfssatz 2. Wir zeigen (4.1) durch Induktion nach m . Es sei also zunächst $\beta = B_i du^i$. Der Tensor

$$P_{ik}(t) = g_{ik}(1-t) + t B_i B_k$$

ist für $0 \leq t < 1$ positiv definit. Nach Hilfssatz 2 ist

$$\alpha(t) = P_{i_1}^j A_{ji_2 \dots i_n} du^{i_1} \dots du^{i_n} \quad \text{für } 0 \leq t \leq 1 \text{ ein auf } \partial G \text{ reguläres L-Feld. Außerdem ist } \alpha(0) = \alpha \text{ und } \alpha(1) = \beta \cdot \eta.$$

Es gilt also wegen B. und E.

$$J(G, \alpha) = J(G, \beta) + J(G, \eta).$$

Jetzt sei (4.1) für $m = M - 1$ bewiesen und β vom Grade M ($M < n$). Wir wählen ein beliebiges Hilfsfeld $\varepsilon = E_i du^i$ der Klasse C^1 , das auf ∂G nirgends verschwindet. Nach Hilfssatz 2 sind die Formen

$$\begin{aligned} \delta(t) &= (t E_{i_1} E_{j_1} + (1-t) g_{i_1 j_1}) g^{j_1 k_1} B_{k_1 i_2 \dots i_M} \\ &= \hat{B}_{i_1 \dots i_M}(t) du^{i_1} \dots du^{i_M} \end{aligned}$$

und also auch die Formen

$$\eta(t) = \hat{B}^{i_1 \dots i_M}(t) A_{i_1 \dots i_n}$$

für $0 \leq t \leq 1$ auf ∂G reguläre L-Felder.

Wegen $\eta(0) = \eta$ und

$$\eta(1) = E^{i_1}(E_j B^{j i_2 \dots i_M}) A_{i_1 \dots i_n} du^{M+1} \dots du^n$$

folgt aus B. und der Induktionsvoraussetzung

$$J(G, \eta) = J(G, \alpha) - (J(G, \beta) - J(G, \varepsilon)) - J(G, \varepsilon).$$

Damit ist F. gezeigt.

Durch wiederholte Anwendung von F. kann die Berechnung von $J(G, \alpha)$ sehr vereinfacht werden. $\bar{G}$ sei etwa ganz in einer Parameterumgebung enthalten. Wir setzen $B^1 = 1$, $B^2 = 0$,

$$\beta = g_{ik} B^i du^k \text{ und}$$

$$\eta = A_{i_1 \dots i_n} B^{i_2} \dots B^{i_n} du^{i_1} = A_{i_1 \dots 1} du^{i_1}.$$

Beachtet man, daß wegen C.

$$J(G, \beta) = 0$$

gilt, so erhält man wegen F.

$$J(G, \alpha) = J(G, A_{i_1 \dots 1} du^{i_1}).$$

Diese Möglichkeit, ein L-Feld zu reduzieren, haben

H o p f und S a m e l s o n in [13] für den Fall, daß α eine quadratische Form ist, benutzt.

§ 5 Beispiele für die Berechnung des Index

Bei den Anwendungen des P o i n c a r é schen Satzes in der Differentialgeometrie sind Ergebnisse wichtig, die für gewisse Felder die Isoliertheit der singulären Stellen garantieren und erlauben, ihren Index zu bestimmen. Die dabei auftretenden Felder sind gekennzeichnet durch Differentialgleichungssysteme von der Art der C o d a z z i schen Gleichungen sowie durch Relationen zwischen den mit Hilfe des Feldtensors gebildeten Invarianten.

Die Berechnung des Index wird oft dadurch einfach, daß der Koeffiziententensor des betrachteten L-Feldes α in der Umgebung der Singularität P ($u^i = 0$) die Gestalt

$$A_{i_1 \dots i_n}^{(s)} + o(r^s) \quad (r = \sqrt{(u^1)^2 + \dots + (u^n)^2})$$

besitzt, wobei die $A_{i_1 \dots i_n}^{(s)}$ Polynome höchstens s-ten Grades in den u^i mit der einzigen gemeinsamen Nullstelle P sind. Dann gilt nämlich wegen § 4 B. und C.:

$$J(P, \alpha) = J(P, A_{i_1 \dots i_n}^{(s)} du^{i_1} \dots du^{i_n}).$$

Vielfach ist es zweckmäßig, die komplexe Schreibweise zu verwenden, weil dann die dem Feld auferlegten Bedingungen eine besonders einfache Gestalt annehmen. Ein T_Y -Feld kann nach Einführung isothermer Parameter in der Form

$$\alpha = 2 \operatorname{Re} (a(d\bar{w})^n)$$

dargestellt werden (vgl. (3.1)). Wir betrachten ein weiteres T_Y -Feld

$$\beta = 2 \operatorname{Re} (\bar{b}(dw))^{n-1} = B_{i_1 \dots i_{n-1}}.$$

Führt man die Differentialoperatoren

$$8) \quad f(r) = o(g(r)) \quad \text{steht für} \quad \lim_{r \rightarrow 0} \frac{\overline{f(r)}}{g(r)} = 0.$$

$$\frac{\partial}{\partial w} = \frac{1}{2i} \left(\frac{\partial}{\partial u^1} - i \frac{\partial}{\partial u^2} \right), \quad \frac{\partial}{\partial \bar{w}} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial}{\partial u^1} + i \frac{\partial}{\partial u^2} \right)$$

ein, so rechnet man leicht die Äquivalenz der Gleichungen

$$(5.1 \text{ a}) \quad \varepsilon^{\ell k} A_{k i_2 \dots i_n \ell} = \varepsilon_{i_2}^j B_{j i_3 \dots i_n},$$

$$(5.1 \text{ b}) \quad \frac{1}{h} \frac{\partial a}{\partial w} = \frac{1}{2} b \quad (g_{ik} = h \delta_{ik}, \text{ vgl. § 1})$$

nach. Jetzt sei $v_i du^i = 2 \operatorname{Re}(\bar{f} dw)$; auch die Relationen

$$(5.2 \text{ a}) \quad \frac{1}{2} (v_{i \ell k} + v_{k \ell i} - g^{\ell m} v_{\ell m} g_{ik}) = E_{ik},$$

$$(5.2 \text{ b}) \quad \frac{\partial}{\partial w} f - \frac{\partial}{\partial \bar{w}} \log h f = \frac{1}{2} (E_{11} + i E_{21})$$

sind gleichwertig. Wir notieren noch

$$(5.3) \quad A_{i_1 \dots i_n} A^{i_1 \dots i_n} = 2^{n+1} h^{-n} |a|^2.$$

Der folgende Satz umfaßt viele Ergebnisse der globalen Flächentheorie (vgl. Kap. II, Satz 1, 3, 5, 6, 10, 11).

Satz I. Die auf M definierte Differentialform n -ten Grades α ($n \geq 2$) verschwinde dort nicht überall und sei von der Klasse C^1 ; weiter sei P^{ik} ein symmetrischer positiv definiter Tensor der Klasse C^2 . Gelten dann in jedem Punkt von M die Gleichungen

$$\text{a)} \quad \varepsilon^{i_1 \ell} A_{i_1 \dots i_n \ell} = d_{i_2 \dots i_n}^{j_1 \dots j_n} A_{j_1 \dots j_n},$$

$$\text{b)} \quad P^{i_1 i_2} A_{i_1 i_2 \dots i_n} = 0,$$

wobei die $d_{i_1 \dots i_n}^{j_1 \dots j_n}$ die Komponenten eines stetigen Tensorfeldes sind, so liegen die Singularitäten von α isoliert, und ihr Index ist negativ.

Beweis: Ohne Beeinträchtigung der Allgemeinheit kann $P^{ik} = g^{ik} = h^{-1} \delta^{ik}$ vorausgesetzt werden, da die Gleichung a) bei Wechsel der kovarianten Differentiation ihre Gestalt nicht ändert; α sei also ein T_Y -Feld. Wegen (5.1 a, b) geht a) dann über in $\frac{1}{h} \bar{\alpha}_{\bar{w}} = C\alpha + D\bar{\alpha}$, wobei C und D aus den $d_{i_1 \dots i_n}^{j_1 \dots j_n}$ gebildet sind.

Nach Vekua [20] haben die Lösungen dieses Differentialgleichungssystems die Form $\bar{\alpha} = \varphi(w) e^{k(w)}$, wobei φ holomorph und k stetig differenzierbar ist. Nun sei Cw^n mit konstantem C das erste von Null verschiedene Glied in der Potenzreihenentwicklung von φ an der singulären Stelle P ($w = 0$). Dann ist

$$J(P, \alpha) = \frac{1}{2\pi} \int_{|w|=\varepsilon} d \arg \bar{w}^n = -n.$$

Damit ist Satz I bewiesen. Kombiniert man ihn mit dem Satz von Poincaré (§ 4, D.), so gewinnt man, da die Eulersche Charakteristik der Kugel positiv ist, das folgende Ergebnis:

Satz I g. M sei der Kugelhomöomorph. Dann verschwindet jedes auf M definierte Feld α der

Klasse C^1 , das den Bedingungen
a) und b) genügt, dort überall.

Die Sätze I und I g wurden für quadratische Formen von
G r o t e m e y e r [11] angegeben, um eine einheitliche
Darstellung mehrerer Resultate der euklidischen Flächentheorie zu ermöglichen.

Der folgende bei den Anwendungen häufig auftretende Spezialfall von I g ergibt sich unmittelbar aus der Integralformel (3.6):

Satz I*g. M sei geschlossen und der Krümmungsskalar S von γ sei positiv. Dann ist jedes auf M definierte T_γ -Feld α n-ten Grades ($n \geq 2$) der Klasse C^2 , das der Bedingung

$$a) \quad \varepsilon^{i_1 \ell} A_{i_1 \dots i_n \ell} = 0$$

genügt, dort überall gleich Null.

Beweis: Da M geschlossen ist, folgt aus (3.6)

$$(5.4) \quad \int_M \varepsilon^{ik} \varepsilon^{\ell m} A_{\ell}^{j_2 \dots j_n} \varepsilon_{ji} A_{m j_2 \dots j_n} \varepsilon^{ik} d\sigma \\ = n \int_M S A^{j_1 \dots j_n} A_{j_1 \dots j_n} d\sigma > 0.$$

Andererseits ergibt sich bei Beachtung der Identität (1.1) wegen $g^{ik} A_{ik i_3 \dots i_n} = 0$ und a):

$$(5.5) \quad \varepsilon^{ik} \varepsilon^{lm} A_{\ell}^{j_2 \dots j_n} A_{m j_2 \dots j_n}{}_{||i}{}^k =$$

$$= -g^{rs} A_{||r}^{j_1 \dots j_n} A_{j_1 \dots j_n}{}_{||s} \leq 0.$$

Aus (5.4) und (5.5) folgt $\alpha \equiv 0$, wie behauptet.

Für den Rest dieses Paragraphen setzen wir die Mannigfaltigkeit M und die Fundamentalform γ als analytisch voraus.

Zunächst geben wir zwei Varianten von Satz I an.

Satz I'. Das nicht überall auf M verschwindende analytische T_γ -Feld α genüge der Ungleichung

$$B_{i_2 \dots i_n} B^{i_2 \dots i_n} \leq p A_{i_1 \dots i_n} A^{i_1 \dots i_n} \quad (n \geq 2)$$

mit $B_{i_2 \dots i_n} = \varepsilon^{jk} A_{j i_2 \dots i_n}{}_{||k}$ und konstantem p . Dann liegen die Singularitäten von α isoliert und ihr Index ist negativ.

Beweis: Es sei wieder $\alpha = 2 \operatorname{Re}(\bar{\alpha} dw^n)$. Die obige Ungleichung geht dann wegen (5.1 a, b) und (5.3) über in

$$|a_w|^2 \leq \frac{1}{2} h p |a|^2.$$

Für die erste von Null verschiedene homogene Form $a^{(n)}(w, \bar{w})$ in der Potenzreihenentwicklung von a an der singulären

Stelle $w = 0$ folgt dann $\alpha_w^{(n)} = 0$. Damit gilt $\alpha^{(n)} = c \bar{w}^n$ mit konstantem c , und hieraus ergibt sich die Behauptung.

Satz I". Die auf M definierte analytische Form $\alpha = A_{ik} du^i du^k$ verschwinde dort nicht überall und genüge den Bedingungen

$$a) \quad \epsilon^{\ell k} A_{i\ell} h_k = h_i^{mn} A_{mn},$$

$$b) \quad p^{ik} A_{ik} S^{\ell m} A_{\ell m} \leq 0;$$

dabei seien p^{ik} , S^{ik} und h_i^{mn} stetige Tensoren, und p^{ik} und S^{ik} seien positiv definit. Dann sind die Nullstellen von α isoliert, und ihr Index ist nicht positiv.

Beweis: Es sei $P(u^i = 0)$ eine Nullstelle von α und

$A_{ik} = \sum_{\nu=0}^{\infty} A_{ik}^{(\nu)}$ die Potenzreihenentwicklung von A_{ik} nach homogenen Formen in den u^i ($A_{ik}^{(n)} \neq 0$). Da

$$p^{ik} = p^{ik}(0) + O(r), \quad S^{ik} = S^{ik}(0) + O(r) \quad 9)$$

gilt, folgt aus a) und b)

$$a') \quad A_{1112}^{(n)} - A_{2111}^{(n)} = 0, \quad A_{2112}^{(n)} - A_{2211}^{(n)} = 0,$$

$$b') \quad p^{ik}(0) S^{\ell m}(0) A_{ik}^{(n)} A_{\ell m}^{(n)} \leq 0.$$

9) $f(r) = O(g(r))$ steht für $\lim_{r \rightarrow 0} \frac{|f(r)|}{|g(r)|} < \infty$.

Wir zeigen, daß P isolierte Nullstelle von $A_{ik}^{(n)}$, also auch von A_{ik} ist. Wäre dies nämlich nicht wahr, so könnte durch geeignete Parameterwahl erreicht werden

$$A_{ik}^{(n)} = 0 \quad (u^1 = u, u^2 = v) \quad (10)$$

Es gibt dann eine ganze Zahl m , $0 < m \leq n$, so daß gilt:

$$A_{ik}^{(n)} = c u^m v^{n-m} (u^{m+1}) \quad (c \neq 0)$$

Wegen a') folgt dann

$$A_{21}^{(n)} = A_{22}^{(n)} = 0 \quad (u^{m+1})$$

und daraus wegen b')

$$P^{11}(0) S^{11}(0) c^2 \leq 0$$

Da P^{ik} und S^{ik} positiv definit sind, ergibt sich $c = 0$ und damit ein Widerspruch. Also ist P isolierte Nullstelle von α .

Aus b) folgt für geeignete nicht negative reelle Zahlen λ und μ , $(\lambda, \mu) \neq (0, 0)$, die Gleichung

$$(\lambda P^{ik} + \mu S^{ik}) A_{ik} = 0$$

und daraus $\det(A_{ik}) \leq 0$; Gleichheit besteht nur in Punkten mit $A_{ik} = 0$. α ist also L-Feld. Wir berechnen den Wert von $J(P, \alpha)$; er hängt nur von $A_{ik}^{(n)}$ ab. Wegen (a') existiert ein homogenes Polynom $z(u^i)$ mit $Z_{ijk} = A_{ik}^{(n)}$. Das durch $Z(u^i)$ im euklidischen (z, u^1, u^2) -Raum gegebene reguläre Flächenstück ist mit Ausnahme der Stelle $u^i = 0$, wo ein Flachpunkt vorliegt, hyperbolisch gekrümmt. Der Index eines isolierten Flachpunktes in einem reellen Asymptotenlinien-netz ist jedoch nie positiv.

10) Wir schreiben statt $a \equiv b \pmod{u}$ kurz $a \equiv b(u)$.

Entsprechend wie bei Satz I kann man aus den lokalen Sätzen I' und I'' in Verbindung mit (§ 4 D.) globale Resultate I'g und I''g erhalten.

Für die weiteren Sätze dieses Kapitels benötigen wir ein Lemma, das in etwas speziellerer Form von Hopf [12] verwendet wurde.

Lemma. Es seien φ und ψ komplexe homogene Formen gleichen Grades in den konjugiert komplexen Variablen w und $\bar{w}$.

φ sei von Null verschieden, und es gelte

$$a) \quad \varphi_w = \psi_{\bar{w}}.$$

1. Besteht dann für eine Konstante r , $r < 1$ die Ungleichung

$$b_1) \quad |\psi|^2 \leq r |\varphi|^2,$$

so besitzt φ nur die Nullstelle $w = 0$, und es gilt $\int_{|w|=1} d \arg \varphi \leq 0$.¹¹⁾

2. Gilt

$$b_2) \quad |\varphi|^2 = |\psi|^2,$$

so ist $\varphi = \varepsilon \bar{\psi}$ mit konstantem ε .

Beim entsprechenden Lemma von Hopf wird eine der Formen als reell angenommen; außerdem wird anstelle von

$b_1) \quad |\psi|^2 = r |\varphi|^2$ vorausgesetzt. Unter diesen schärferen Bedingungen ist dann die Gestalt von φ und ψ weitgehend

11) Das Integral wird im positiven Sinne um die Einheitskreisscheibe erstreckt.

bestimmt, und die Beweise lassen sich rein algebraisch führen, während hier elementare funktionentheoretische Hilfsmittel herangezogen werden.

Beweis von 1.: Wir nehmen an, w_0 ($w_0 \neq 0$) sei eine Nullstelle von φ . Dann ist wegen b_1) sowohl φ als auch ψ durch die reellwertige Linearform $u = \operatorname{Im}(w_0 \bar{w})$ teilbar, und es gibt Polynome φ^* und ψ^* so, daß $\varphi = u^m \varphi^*$, $\psi = u^m \psi^*$ gilt und φ^* nicht durch u teilbar ist. Aus a) folgt

$$\frac{1}{2} i m u^{m-1} (\bar{w} \varphi^* + w_0 \psi^*) = u^m (\psi_{\bar{w}}^* - \varphi_w^*)$$

und daraus, wenn man durch u^{m-1} dividiert und dann w durch w_0 ersetzt,

$$|\varphi^*(w_0, \bar{w}_0)| = |\psi^*(w_0, \bar{w}_0)| \neq 0.$$

Jetzt ist aber b_1) für gewisse w einer hinreichend kleinen Umgebung von w_0 nicht erfüllt; $w = 0$ ist also die einzige Nullstelle von φ .

Wir berechnen nun $J = \frac{1}{2\pi} \int_{|w|=1} d \arg \varphi$. Dazu stellen wir φ als Produkt seiner Linearfaktoren dar:

$$\varphi(w, \bar{w}) = \prod_{\nu=1}^n L_{\nu}, \quad L_{\nu} = a_{\nu} w + b_{\nu} \bar{w} \quad (\nu=1, \dots, n).$$

Da, wie eben gezeigt, φ nur für $w = 0$ verschwindet, gilt

$|a_{\nu}| \neq |b_{\nu}|$ ($\nu=1, \dots, n$). Es ist demnach

$$J = \frac{1}{2\pi} \sum_{\nu=1}^n \int_{|w|=1} d \arg L_{\nu} = \sum_{\nu=1}^n J_{\nu},$$

wobei $J_{\nu} = +1$, wenn $|a_{\nu}| > |b_{\nu}|$, und $J_{\nu} = -1$ wenn $|b_{\nu}| > |a_{\nu}|$.

Also gilt $J = n_a - n_b = n - 2n_b$ wenn wir mit n_a die außerhalb und mit n_b die innerhalb des Einheitskreises gelegenen Nullstellen des komplexen Polynoms

$$\varphi(1, z) = \prod_{\nu=1}^n (a_{\nu} + b_{\nu} z)$$

bezeichnen. Wegen a) existiert eine homogene Form $F(w, \bar{w})$ mit $F_{\bar{w}} = \varphi$ und $F_w = \psi$. Setzt man $f(z) = F(1, z)$ so erhält man

$$(5.6) \quad f'(z) = \varphi(1, z), \quad (n+1)f(z) - z f'(z) = \psi(1, z).$$

Für $z = e^{i\vartheta}$, $w = e^{-\frac{i\vartheta}{2}}$ gilt wegen der Homogenität von φ und ψ

$$|\varphi(1, z)| = |\varphi(w, \bar{w})|, \quad |\psi(1, z)| = |\psi(w, \bar{w})|.$$

Also folgt aus b₁) und (5.6) für $|z| = 1$

$$(n+1)^2 |f(z)|^2 - 2(n+1) \operatorname{Re}(z f'(z) \overline{f(z)}) + |f'(z)|^2 \leq r |f'(z)|^2.$$

Hieraus ersieht man, daß die Funktion $f(z)$ keine Nullstelle auf der Peripherie des Einheitskreises besitzt, da sonst wegen $r < 1$ auch $f'(z)$ und damit $\varphi(w, \bar{w})$ dort Nullstellen hätten. Es gilt also

$$(5.7) \quad 0 < (n+1)^2 |f(z)|^2 < 2(n+1) \operatorname{Re}(z f'(z) \overline{f(z)}) \quad (\text{für } |z| = 1)$$

und damit

$$-\frac{\pi}{2} < \arg(z f'(z)) - \arg(f(z)) < \frac{\pi}{2} \quad (\text{für } |z| = 1).$$

Hieraus folgt aber

$$n_i + 1 = \frac{1}{2\pi} \int_{|z|=1} d \arg(z f'(z)) = \frac{1}{2\pi} \int_{|z|=1} d \arg f(z)$$

und schließlich wegen (5.7)

$$n_i + 1 = \frac{1}{2\pi i} \int_{|z|=1} \frac{f'(z)}{f(z)} dz = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{\operatorname{Re}(z f' \bar{f})}{|f|^2} d\vartheta > \frac{n+1}{2} \quad (z = e^{i\vartheta}).$$

Also ist $J = n - 2n_i \leq 0$.

Beweis von 2.: Wegen a) können wir eine homogene Form $F(w, \bar{w})$ so finden, daß $F_{\bar{w}} = \varphi$ und $F_w = \psi$ gilt. Nach b₂) gibt es Polynome U und V mit $\psi = UV$ und $\varphi = U\bar{V}$. Nun ist

$$(n+1)F = U(wV + \bar{w}\bar{V}) = (n+1)UR_1, \quad R_1 = \bar{R}_1.$$

Weiter gilt wegen $U \neq 0$

$$R_{1w} = \left(\frac{F}{U}\right)_w = V - \frac{R_1}{U} U_w ,$$

$$\overline{R_{1w}} = R_{1\overline{w}} = \left(\frac{F}{U}\right)_{\overline{w}} = \overline{V} - \frac{R_1}{U} U_{\overline{w}} .$$

Es folgt $\overline{U_w} U = \overline{U} U_{\overline{w}}$. Bei Berücksichtigung der Identität

$\overline{U_w} = \overline{U}_{\overline{w}}$ erhält man daraus

$$\left(\frac{\overline{U}}{U}\right)_{\overline{w}} = \frac{\overline{U}_{\overline{w}} U - \overline{U} U_{\overline{w}}}{U^2} = 0 .$$

Also gilt $U = \varepsilon \overline{U}$ ($|\varepsilon| = 1$), wobei ε als holomorphe Funktion von konstantem Betrag eine Konstante ist. Es ist daher

$$\varphi = U \overline{V} = \varepsilon \overline{U} \overline{V} = \varepsilon \overline{\psi} , \quad \text{wie zu beweisen war.}$$

Jetzt folgen Anwendungen des obigen Lemmas. Zunächst betrachten wir eine quadratische Form α auf der analytischen Mannigfaltigkeit M . Mit H und K bezeichnen wir die Invarianten $\frac{1}{2} g^{ik} A_{ik}$ und $\frac{1}{2} \underline{A}^{ik} A_{ik}$. Setzt man $\gamma_{\gamma} \alpha = C_{ik} du^i du^k$, so gilt $C_{ik} = A_{ik} - H g_{ik}$ und $\frac{1}{2} C^{ik} C_{ik} = H^2 - K$.

Satz II. Das auf M definierte analytische Feld $\alpha = A_{ik} du^i du^k$ genüge der Differentialgleichung

$$a) \quad \varepsilon^{kl} A_{ikll} = d_i^{kl} A_{kl} ,$$

wobei d_i^{kl} ein stetiger Tensor sei, welcher der Bedingung

$$d_i^{kl} g_{kl} = 0$$

genüge. Außerdem sei P eine Nullstelle von $\gamma_{\gamma} \alpha$, und es existiere eine reelle Zahl r , $0 \leq r < 1$, so daß für alle Punkte Q einer hinreichend kleinen Umgebung von P die Ungleichung

$$b) \quad (H(Q) - H(P))^2 \leq r(H(Q)^2 - K(Q))$$

besteht. Dann ist auf M entweder $\alpha = H\gamma$ mit konstantem H, oder P ist isolierte Nullstelle von $\gamma\alpha$ mit $J(P, \gamma\alpha) < 0$.

Beweis: Die Bedingung a) läßt sich umschreiben in

(5.8)

$$\varepsilon^{kl} C_{ikll} = -\varepsilon_i^l H_l + d_i^{kl} C_{kl}.$$

Aus $C_{ik} \equiv 0$ folgt also $H_l = 0$ und $\alpha = H\gamma$ auf M. Jetzt sei $\gamma\alpha$ nicht überall auf M gleich Null. Wir betrachten die nach homogenen Formen in den u^i geordneten Potenzreihenentwicklungen an der Stelle P ($u^i = 0$):

$$H = \sum_{\nu=0}^{\infty} H^{(\nu)}, \quad h = \sum_{\nu=0}^n h^{(\nu)},$$

$$C_{ik} = \sum_{\nu=n}^{\infty} C_{ik}^{(\nu)}, \quad (C_{ik}^{(n)} \neq 0).$$

Aus b) folgt dann $H^{(\nu)} = 0$ für $1 \leq \nu < n$. Setzt man nun

$$\Phi = C_{41}^{(n)} + i C_{42}^{(n)} \quad \text{und} \quad \Psi = h^{(0)} H^{(n)},$$

(5.1 a), b) aus (5.8)

$$\varphi_w = \Psi \bar{w}.$$

Weiter ergibt sich aus b) bei Beachtung von (5.3)

$$|\Psi|^2 \leq r|\varphi|^2.$$

Die Behauptung des Satzes folgt nun aus dem Lemma.

Jetzt beschäftigen wir uns mit kubischen Formen

$$\alpha = A_{ijk} du^i du^j du^k. \quad \text{Wir setzen}$$

$$(5.9) \quad \gamma\alpha = C_{ijk} du^i du^j du^k, \quad V_l = \frac{1}{2} A_{il}^i;$$

dann ist

$$(5.10) \quad C_{ijk} = A_{ijk} - \frac{1}{2} (V_i g_{jk} + V_j g_{ki} + V_k g_{ij})$$

und

$$(5.11) \quad C_{ikl} C^{ikl} = V_l V^l - \varepsilon^{i_1 j_1} \varepsilon^{i_2 j_2} A_{i_1 i_2 k} A_{j_1 j_2}^k.$$

Zunächst geben wir ein Analogon zu Satz II an:

Satz III. Die auf M definierte analytische kubische Form α genüge dort der Differentialgleichung

$$a) \quad \varepsilon^{lk} A_{ijk||l} = 0.$$

Außerdem sei P eine Nullstelle von $\gamma_\gamma \alpha$, und es gebe eine reelle Zahl r , $0 \leq r < 1$, so daß für alle Punkte Q einer gewissen Umgebung von P gilt:

$$b) \quad V_l V^l \leq r C_{ikl} C^{ikl}.$$

Dann ist auf M entweder $\alpha = \gamma_\gamma \alpha = 0$, oder die Nullstelle P von $\gamma_\gamma \alpha$ liegt isoliert, und ihr Index ist nicht positiv.

Beweis: Die Bedingung a) läßt sich umschreiben in

$$\begin{aligned} V_{i||l} &= V_{l||i} \\ (5.12) \quad \varepsilon^{lk} C_{ijk||l} &= \frac{1}{2} (\varepsilon_i^\alpha V_{j||\alpha} + \varepsilon_j^\alpha V_{i||\alpha}) \\ &= \varepsilon_i^\alpha (V_{j||\alpha} - \frac{1}{2} g_{\alpha j} g^{mn} V_{m||n}). \end{aligned}$$

Wir betrachten die Potenzreihenentwicklungen an der Stelle P ($u^i = 0$):

$$V_i = \sum_{\nu=0}^{\infty} V_i^{(\nu)}; \quad C_{ijk} = \sum_{\nu=n}^{\infty} C_{ijk}^{(\nu)} \quad (C_{ijk}^{(n)} \neq 0).$$

Aus b) folgt dann $V_\ell^{(\nu)} = 0$ für $0 \leq \nu < n$. Setzt man nun $\varphi = 2(C_{111}^{(n)} + iC_{211}^{(n)})$ und $\psi = h^{(0)}(V_1^{(n)} + iV_2^{(n)})$, so gewinnt man wegen (5.1 a, b) und (5.2 a, b) aus (5.12) $\varphi_w = \psi_{\bar{w}}$.

Weiter ergibt sich aus b) bei Beachtung von (5.3)

$$|\psi|^2 \leq r|\varphi|^2.$$

Die Behauptung des Satzes folgt nun wieder aus dem Lemma.

Die lokalen Sätze II und III liefern in Verbindung mit D. (§ 4) die Resultate:

Satz II g. Die analytische Mannigfaltigkeit M sei der Kugel homöomorph. Dann gilt für jede auf M definierte analytische quadratische Form α , die den Bedingungen a) und b) des Satzes II genügt, die Gleichung $\alpha = H\gamma$ mit konstantem H .

Satz III g. Die analytische Mannigfaltigkeit M sei der Kugel homöomorph. Dann verschwindet jede auf M definierte analytische kubische Form α , die den Bedingungen a) und b) des Satzes III genügt, dort überall.

Die folgenden Sätze sind ein Beispiel dafür, daß der P o i n c a r é sche Satz auch anwendbar ist, wenn die Singularitäten des Feldes nicht isoliert liegen.

Satz IV. Die auf der zweidimensionalen analytischen Riemannschen Mannigfaltigkeit M von positiver konstanter Krümmung S definierte analytische kubische Form α verschwinde dort nicht überall und erfülle die Bedingungen:

- a) $\epsilon^{lk} A_{ijkl} = 0$,
 b) $C_{ijk} C^{ijk} - V_l V^l = 0$.

Dann werden die Formen α ,
 $\tau_Y \alpha = C_{ijk} du^i du^j du^k$ und $\beta = V_l du^l$ (vgl. (5.9, 10))
 an denselben Stellen singulär,
 und es gilt:

(A) Eine Nullstelle P von α
 liegt entweder isoliert,
 oder es lassen sich isotherme
 Koordinaten $u^1 = u, u^2 = v$ so finden,
 daß die Kongruenzen

$$\begin{aligned} A &= A_{111} \equiv 0 (u^n) , & A^{(n)} &= au^n + 0 , \\ B &= A_{211} \equiv 0 (u^{n+1}) , \end{aligned}$$

(K)

$$\begin{aligned} C &= A_{221} \equiv 0 (u^{n+2}) , \\ D &= A_{222} \equiv 0 (u^{n+3}) \end{aligned}$$

bestehen.

(B) Ist die Nullstelle P isoliert, so gilt

$$J(\dot{P}, \beta) = -J(P, \gamma, \alpha) .$$

Beweis: Daß die Formen α, γ, α und β die Nullstellen gemeinsam haben, folgt unmittelbar aus (5.10) und b). Wir beweisen nun die Behauptung (A). Ohne Beeinträchtigung der Allgemeinheit kann $S = 1$ angenommen werden. Wir wählen isotherme Parameter u^i ($u^1 = u, u^2 = v$) in der Umgebung von P ($u^i = 0$), so daß die Fundamentalform γ die Riemannsche Gestalt (1.5) annimmt. Dann gelten die Kongruenzen:

$$(5.13) \quad \frac{h_{11}}{h} \equiv -u \ (u(u^2 + v^2)), \quad \frac{h_{22}}{h} \equiv -v \ (v(u^2 + v^2)).$$

Die Bedingung a) geht über in

$$(5.14) \quad \begin{aligned} A_{12} - B_{11} &= \frac{h_{12}}{h} (A + C), \\ B_{12} - C_{11} &= \frac{1}{2h} (h_{12} (B + D) - h_{11} (A + C)), \\ C_{12} - D_{11} &= -\frac{h_{12}}{h} (B + D). \end{aligned}$$

Die Bedingung b) lautet bei Beachtung der Identität (5.11) ausgeschrieben

$$(5.15) \quad AC - B^2 + BD - C^2 = 0 ,$$

oder wenn

$$A = \sum A^{(\nu)}, \quad B = \sum B^{(\nu)}, \quad C = \sum C^{(\nu)}, \quad D = \sum D^{(\nu)}$$

die nach homogenen Formen geordneten Potenzreihenentwicklungen von A, B, C und D im Punkte $u^i = 0$ sind,

$$(5.15)_k \quad \sum_{\mu+\nu=k} (A^{(\nu)} C^{(\mu)} - B^{(\nu)} B^{(\mu)} + B^{(\nu)} D^{(\mu)} - C^{(\nu)} C^{(\mu)}) = 0 .$$

Jetzt sei n die natürliche Zahl, für die gilt:

$$A^{(j)} = B^{(j)} = C^{(j)} = D^{(j)} = 0 \quad (j < n),$$

$$(5.16) \quad G = A^{(n)^2} + B^{(n)^2} + C^{(n)^2} + D^{(n)^2} \neq 0.$$

Ist die Form $G(u, v)$ definit, so ist P isolierte Nullstelle von α . Ist G jedoch semidefinit, dann kann man, wenn nötig nach einer Drehung des lokalen Koordinatensystems, ansetzen

$$(5.17) \quad A^{(n)} = B^{(n)} = C^{(n)} = D^{(n)} = 0 \quad (u).$$

Wir wollen jetzt (K) aus den Formeln (5.13 - 17) herleiten. Damit ist dann auch gezeigt, daß die Singularität P von α nur dann isoliert liegt, wenn die Form G definit ist; dies wird wichtig beim Beweis von (B).

Zunächst bestimmen wir die Gestalt von $A^{(n)}, B^{(n)}, C^{(n)}$ und $D^{(n)}$. Wäre $A^{(n)}$ das Nullpolynom, so würden wegen (5.14, 16, 17) auch $B^{(n)}, C^{(n)}$ und $D^{(n)}$ verschwinden; wir setzen also an

$$A^{(n)} = \alpha u^m v^{n-m} (u^{m+1}) \quad (\alpha \neq 0, m \leq n).$$

Wegen (5.14, 16, 17) gilt dann

$$\begin{aligned} B^{(n)} &= \frac{n-m}{m+1} \alpha u^{m+1} v^{n-m-1} (u^{m+2}), \\ C^{(n)} &= \frac{(n-m)(n-m-1)}{(m+1)(m+2)} \alpha u^{m+2} v^{n-m-2} (u^{m+3}), \\ D^{(n)} &= 0 (u^{m+3}); \end{aligned}$$

und aus (5.15_{2n}) folgt

$$\frac{n-m}{m+1} \left(\frac{n-m-1}{m+2} - \frac{n-m}{m+1} \right) \alpha^2 = 0.$$

Also ist $n = m$, und wir erhalten

$$(K_n) \quad A^{(n)} = \alpha u^n, \quad B^{(n)} = C^{(n)} = D^{(n)} = 0, \quad (\alpha \neq 0).$$

Nun beweisen wir (K) durch vollständige Induktion.

Es sei $N, N > n$, eine natürliche Zahl; wir nehmen an, für alle $j < N$ sei

$$(K_j) \quad \begin{aligned} A^{(j)} &\equiv 0 (u^n), & B^{(j)} &\equiv 0 (u^{n+1}), \\ C^{(j)} &\equiv 0 (u^{n+2}), & D^{(j)} &\equiv 0 (u^{n+2}) \end{aligned}$$

schon gezeigt. Dann ergibt sich aus (5.13, 14)

$$(5.18_i) \quad \begin{aligned} A_{12}^{(N+i)} - B_{14}^{(N+i)} &\equiv 0 (u^n), \\ B_{12}^{(N+i)} - C_{14}^{(N+i)} &\equiv 0 (u^{n+1}), & (i = 0, 1) \\ C_{12}^{(N+i)} - D_{14}^{(N+i)} &\equiv 0 (u^{n+2}). \end{aligned}$$

Andererseits folgt aus (5.15_{n+N})

$$A^{(n)} C^{(N)} \equiv 0 (u^{2n+2})$$

und also wegen (K_n)

$$C^{(N)} \equiv 0 (u^{n+2}).$$

Das liefert zusammen mit (5.18₀)

$$(K_N^*) \quad \begin{aligned} A^{(N)} &\equiv 0 (u^n), & B^{(N)} &\equiv 0 (u^{n+1}), \\ C^{(N)} &\equiv 0 (u^{n+2}), & D^{(N)} &\equiv d v^N (u^{n+3}). \end{aligned}$$

Gelingt es, $d = 0$ nachzuweisen, so ist damit (K_N) und also auch (K) gezeigt.

Wir nehmen an

$$(5.19) \quad d \neq 0.$$

Aus (5.15_{2N+1}) und (5.15_{N+N+1}) gewinnen wir wegen (K_j) ($j < N$) und (K_N^{*}) die Kongruenzen

$$D^{(N)} B^{(N+1)} \equiv 0 (u^n)$$

und

$$(5.20) \quad A^{(n)} C^{(N+1)} + B^{(n+1)} D^{(N)} \equiv 0 (u^{2n+2}).$$

Aus ihnen folgt $B^{(N+1)} \equiv 0 (u^n)$ und $C^{(N+1)} \equiv 0 (u)$, und daraus wegen (5.18₁)

$$C^{(N+1)} \equiv 0 (u^{n+1}) .$$

Setzen wir dies in (5.20) ein, so erhalten wir wegen (5.19)

$$(5.21) \quad B^{(n+1)} = 0$$

und damit der Reihe nach

$$(K_{N+1}^*) \quad \begin{aligned} C^{(N+1)} &\equiv 0 (u^{n+2}), & B^{(N+1)} &\equiv 0 (u^{n+1}), \\ A^{(N+1)} &\equiv 0 (u^n), \end{aligned}$$

wenn wir nochmals (5.18₁) berücksichtigen.

Jetzt berechnen wir $B^{(n+2)}$ und $B^{(N+2)}$. Es gilt wegen (5.21)

und (5.15_{2n+2}) $A^{(n)} C^{(n+2)} = 0$, also $C^{(n+2)} = 0$. Aus

(5.13,14) folgt dann $B_{12}^{(n+2)} = \frac{1}{2} a u^{n+1}$ und daraus

$$(5.22) \quad B^{(n+2)} \equiv \frac{1}{2} a u^{n+1} v (u^{n+2}) .$$

Weiter ergibt sich bei Beachtung von (K_{N+i}^*) ($i = 0, 1$) und

K_j ($j < N$) aus (5.15_{n+N+2})

$$A^{(n)} C^{(N+2)} + B^{(n+2)} D^{(N)} \equiv 0 (u^{2n+2})$$

und daraus wegen (5.22) nach Division durch $a u^n$

$$(5.23) \quad C^{(N+2)} \equiv - \frac{1}{2} d u v^{N+1} (u^{n+2}) .$$

Nun wenden wir noch einmal (5.14) an; es gilt wegen (5.13),

(K_j) ($j < N$) und (K_N^*)

$$B_{12}^{(N+2)} - C_{11}^{(N+2)} \equiv - \frac{1}{2} v D^{(N)} \equiv - \frac{1}{2} d v^{N+1} (u^{n+1}) . .$$

Hieraus folgt jedoch

$$B^{(N+2)} \equiv - d v^{N+2} (u^{n+1}) .$$

Jetzt ist leicht zu sehen, daß die Annahme (5.19) einen

Widerspruch erzeugt. Denn aus (5.15_{2n+2}) erhalten wir bei

Berücksichtigung von $(K_j)(j < N)$ und (K_{N+i}^*) ($i = 0, 1$)
die Kongruenz

$$D^{(N)} B^{(N+2)} = 0 \quad (u^n)$$

und somit $-d^2 = 0$. Damit ist Teil (A) bewiesen.

Nun zeigen wir die Richtigkeit von (B). Wie beim Beweis von Satz III bezeichnen wir mit φ und ψ die ersten nicht identisch verschwindenden homogenen Formen in den Potenzreihenentwicklungen von $2(C_{111} + iC_{211})$ und $h(V_1 + iV_2)$ an der Stelle P. Aus a) folgt dann wieder

$$\varphi_w = \psi_{\bar{w}}$$

und aus b)

$$(5.24) \quad |\varphi|^2 = |\psi|^2.$$

Durch Anwendung des zweiten Teiles des Lemmas erhalten wir

$$(5.25) \quad \varphi = \varepsilon \bar{\psi}$$

mit konstantem ε . Ist nun P isolierte Nullstelle von α , so ist die Form $G(u, v)$ (vgl. (5.16)) definit. Andererseits folgt aus (5.10)

$$A_{ikl} A^{ikl} = C_{ikl} C^{ikl} + 3V_l V^l$$

und damit

$$G = |\varphi|^2 + 3|\psi|^2,$$

so daß wegen (5.24) mit G auch $|\varphi|^2$ und $|\psi|^2$ definit sind.

Aus (5.25) ergibt sich dann

$$J(P, \tau_\gamma \alpha) = -J(P, \beta).$$

Und wieder gelangen wir mit Hilfe des Satzes von
F o i n c a r e zu einem globalen Resultat.

Satz IV g. Die analytische Riemannsche Mannigfaltigkeit von konstanter Krümmung sei der Kugel homöomorph. Dann ist jede auf ganz M definierte analytische kubische Form α , die den Bedingungen a) und b) von Satz IV genügt, dort überall gleich Null.

Beweis: Wir nehmen an, α verschwinde nicht überall auf M . Anstelle von $\tau_{\gamma}\alpha$ und β betrachten wir die normierten Formen

$$(5.26) \quad \delta = \frac{(\tau_{\gamma}\alpha)^2}{c_{ikl}c_{ikl}} \quad , \quad \varepsilon = \frac{\beta^2}{V_l V_l} \quad .$$

Sie sind überall definiert, außer an den Nullstellen von α . Jedoch lassen sie sich an Feldern mit nur isolierten Singularitäten, die natürlich keine Nullstellen sind, fortsetzen. Ist nämlich Q Häufungspunkt von Nullstellen von α , so kann man nach Satz IV (A), die Parameter u und v in einer Umgebung von Q ($u = v = 0$) derart wählen, daß α die Gestalt (K) besitzt. Dann folgt bei Beachtung von (5.9, 10)

$$c_{ikl} = u^n \hat{c}_{ikl} \quad , \quad \hat{c}_{ikl}(Q) \neq 0 \quad ,$$

$$V_l = u^n \hat{V}_l \quad , \quad \hat{V}_l(Q) \neq 0 \quad .$$

Man kann jetzt die Singularität Q von δ und ε heben, indem man in (5.26) jeweils durch u^{2n} kürzt.

Bei Benutzung der Eigenschaften B. und E. des Index gewinnt man aus Satz IV. (B) für eine Singularität P von δ und ε

$$J(P, \beta) = 2J(P, \tau_y \alpha) = -2J(P, \beta) = -J(P, \delta).$$

Nun liefert der Satz von P o i n c a r é

$$6\chi(M) = \sum J(P, \delta) = -\sum J(P, \varepsilon) = -2\chi(M).$$

Das widerspricht $\chi(M) = 2$; also gilt $\alpha = 0$ überall auf M.

Kapitel II

Über einige Sätze im Großen in der affinen Flächentheorie

§ 6 Die Grundformeln der radialaffinen Flächentheorie¹²⁾

Die radialaffine Geometrie ist bekanntlich die Invariantentheorie der Gruppe der affinen Abbildungen eines affinen Punktraums α auf sich, die einen vorgegebenen Punkt O festlassen. Diese Abbildungen entsprechen genau den Isomorphismen des Vektorraums V , der aus den Vektoren $\overrightarrow{OP}$, $P \in \alpha$ besteht; V und α können also im Hinblick auf die radialaffine Geometrie identifiziert werden. Wir sprechen deshalb im folgenden auch im Vektorraum von Punkten, Ebenen und Flächen.

Durch $\varphi(u^i)$ ($i = 1, 2$) sei ein reguläres Flächenstück F der Klasse C^4 im dreidimensionalen reellen V Vektorraum gegeben; φ_1, φ_2 und φ seien überall auf F linear unabhängig. Dies bedeutet geometrisch, daß keine Tangentialebene an F den Nullvektor enthält. Dem Vektor φ wird nun in affininvarianter Weise ein Kovektor $\xi(u^i)$ der Klasse C^3 , der Normalenvektor, zugeordnet, der die Tangentialebenen von F festlegt. ξ wird durch die Forderungen

$$(6.1) \quad \langle \xi, \varphi_i \rangle = 0, \quad \langle \xi, \varphi \rangle = 1$$

eindeutig festgelegt.

Als Fundamentaltensor für eine Riemannsche Metrik auf F wählt man

$$(6.2) \quad G_{ik} = \langle \xi_i, \varphi_k \rangle;$$

12) vgl. [14], S. 125 ff.

auf diesen Tensor sind also in den §§ 6 - 7 die kovariante Differentiation und der Diskriminantentensor einbezogen. Dementsprechend fordern wir $\det (G_{ik}) \neq 0$. G_{ik} ist positiv definit, wenn F Stück einer Eifläche ist, die den Nullvektor im Inneren enthält. Der symmetrische dreistufige zweite Fundamentaltensor wird durch

$$(6.3) \quad A_{ikl} = \langle \xi_l, \varphi_{ilk} \rangle = - \langle \xi, \varphi_{illkl} \rangle$$

gegeben. Die Ableitungsgleichungen lauten jetzt

$$(6.4) \quad \varphi_{ilk} = A_{ik}^l \varphi_l - G_{ik} \varphi,$$

$$(6.5) \quad \xi_{ilk} = -A_{ik}^l \varphi_l - G_{ik} \xi.$$

Wir notieren die Integrabilitätsbedingungen:

$$(6.6) \quad \varepsilon^{kl} A_{ijkll} = 0,$$

$$(6.7) \quad S - 1 = C_{ikl} C^{ikl} - V_l V^l.$$

Dabei ist S die Skalarkrümmung von G_{ik} und

$$(6.8) \quad V_l = \frac{1}{2} G^{ik} A_{ikl},$$

$$(6.9) \quad C_{ikl} = A_{ikl} - \frac{1}{2} (G_{ik} V_l + G_{kl} V_i + G_{li} V_k).$$

Es gilt:

$$G^{ik} C_{ikl} = 0.$$

V_l steht in enger Beziehung zum affinen Stützabstand ("Affinentfernung von Nullpunkt") von φ , der durch

$$(6.10) \quad \vartheta = \frac{|(\varphi, \varphi_1, \varphi_2)|^{1/2}}{|\det (G_{ik})|^{1/4}}$$

gegeben ist; es gilt nämlich

$$(6.11) \quad V_l = \pm (\log \vartheta)_l.$$

$\mathfrak{g}$ ist allerdings nur gegenüber äquiaffinen Transformationen von V invariant. Wichtig ist der folgende (lokale) Eindeutigkeitssatz: Zwei Flächenstücke, die auf die gleichen Parameter bezogen sind und in den Fundamentaltensoren G_{ik} und A_{ikl} übereinstimmen, lassen sich durch eine lineare Transformation von V ineinander überführen.

Die Flächen mit konstantem $\mathfrak{g}$ gehören zur Klasse der eigentlichen Affinsphären. Gilt auf F $A_{ikl} \equiv 0$, so handelt es sich um ein Stück einer Mittelpunktsquadratik, deren Mittelpunkt durch den Nullvektor dargestellt wird. Die einzigen geschlossenen Flächen dieser Art sind die Ellipsoide mit dem Nullvektor als Mittelpunkt; wir wollen sie kurz als M -Ellipsoide bezeichnen.

§ 7 Sätze im Großen der radialaffinen Flächentheorie

Mit $\mathfrak{g}$ bezeichnen wir die Klasse der viermal stetig differenzierbaren geschlossenen Flächen in V , auf denen G_{ik} überall definiert und nicht ausgeartet ist. Da eine geschlossene Fläche Punkte mit $\det (G_{ik}) > 0$ besitzt, ist jedes Element F aus $\mathfrak{g}$ elliptisch gekrümmt, also konvex. Weil außerdem keine Tangentialebene an F den Nullvektor O enthält, liegt dieser im Inneren von F . Umgekehrt gehört jede elliptisch gekrümmte geschlossene Fläche der Klasse $\mathfrak{C}^4$, deren Inneres den Punkt O enthält, zu $\mathfrak{g}$. Wir suchen

nun unter anderem differentialgeometrische Eigenschaften, welche die M-Ellipsoide unter den Flächen der Klasse $\mathcal{G}$ kennzeichnen.

Satz 1. (Blaschke [2], [4]). Eine Fläche F aus $\mathcal{G}$ mit konstanter Affinentfernung ϱ ist ein M-Ellipsoid.

Beweis: Aus $\varrho = \text{konst.}$ folgt bei Beachtung von (6.11)

$V_\ell \equiv 0$. Wegen der Gültigkeit der Formeln (6.6) und (6.8) ergibt sich dann aus Satz I $g_{ik\ell} \equiv 0$ auf F und daraus die Behauptung.

Der folgende, allerdings nur für analytische Flächen bewiesene Satz, steht zu dem vorhergehenden in einem ähnlichen Verhältnis wie der Chernsche H-K-Satz zum Liebmannschen H-Satz in der euklidischen Flächentheorie.

Satz 1'. Es sei F eine analytische Fläche aus $\mathcal{G}$. Gilt dann in der Umgebung jeder Nullstelle von $C_{ik\ell}$

$$a) \quad V_\ell V^\ell \leq q(S-1)$$

mit einer beliebigen positiven Konstante q , so ist F ein M-Ellipsoid.

Beweis: Wir setzen $q = r(1-r)^{-1}$ ($r < 1$). Dann wird wegen (6.7) aus a)

$$V_\ell V^\ell \leq r(S-1 + V_\ell V^\ell) = r C_{ik\ell} C^{ik\ell}.$$

Wenden wir Satz III g an, so erhalten wir $A_{ikl} \equiv 0$ auf F.

Ein bekannter Satz der Differentialgeometrie im dreidimensionalen euklidischen Raum besagt, daß die Eiflächen, speziell also die Kugeln, durch ihre innere Geometrie bis auf Bewegungen eindeutig bestimmt sind. Die Frage liegt nahe, ob es in $\mathcal{Q}$ Flächen gibt, die allein durch den Tensor G_{ik} bis auf radiale Affinitäten gekennzeichnet werden. Beschränkt man sich auf analytische Flächen, so läßt sich dies wenigstens für die M-Ellipsoide zeigen. Es gilt nämlich

Satz 2. Ist auf der analytischen Fläche F aus $\mathcal{Q}$ die Skalarkrümmung S von G_{ik} konstant, so ist F ein M-Ellipsoid.

Beweis: Wir beweisen zunächst den folgenden Satz:

Auf jeder Fläche F der Klasse C^4 aus $\mathcal{Q}$ gibt es Punkte mit $S = 1$.

Da nämlich G_{ik} auf F positiv definit ist, sind die Größen V_ℓ , V^ℓ und C_{ikl} , C^{ikl} dort nicht negativ. Nach dem Satz von Poincaré (§ 4 D.) existieren auf F Nullstellen von V_ℓ bzw. von C_{ikl} ; in ihnen gilt wegen (6.7) $S \geq 1$ bzw. $S \leq 1$.

Aus $S = \text{konst.}$ folgt also $S = 1$ auf F, und das ist nach (6.7) gleichbedeutend mit

$$C_{ikl} C^{ikl} = V_\ell V^\ell.$$

Wegen (6.6) sind die Voraussetzungen von Satz VI g erfüllt; es gilt demnach $A_{ikl} \equiv 0$, und F ist ein M-Ellipsoid.

Im allgemeinen wird eine Fläche aus $\mathcal{Q}$ nicht allein durch G_{ik} bis auf radiale Affinitäten bestimmt sein. Jedoch gelten folgende Sätze:

Satz 3. Es seien F und $\hat{F}$ zwei auf die gleiche Parametermannigfaltigkeit bezogene Flächen aus $\mathcal{Q}$. Gilt in entsprechenden Punkten $G_{ik} = \hat{G}_{ik}$ und $V_l = \hat{V}_l$, so läßt sich $\hat{F}$ durch eine radiale Affinität in F überführen.

Beweis: Der Tensor $L_{ikl} = A_{ikl} - \hat{A}_{ikl}$ genügt den Bedingungen

$$G^{ik} L_{ikl} = 0, \quad \varepsilon^{lm} L_{ikl} \varepsilon_{lm} = 0.$$

Aus Satz I g folgt $L_{ikl} \equiv 0$ und daraus die Behauptung.

Satz 3'. Es seien F und $\hat{F}$ zwei auf die gleiche Parametermannigfaltigkeit bezogene analytische Flächen aus $\mathcal{Q}$. Gilt dann $G_{ik} = \hat{G}_{ik}$ und

$$(V_l - \hat{V}_l)(V^l - \hat{V}^l) \leq r (C_{ikl} - \hat{C}_{ikl})(C^{ikl} - \hat{C}^{ikl})$$

mit einer Konstanten r, $r < 1$,

so läßt sich $\hat{F}$ durch eine radiale Affinität in F überführen.

Diese Behauptung folgt aus Satz III g.

§ 8 Die Grundformeln der Äquiaffinen Flächentheorie¹³⁾

In der Differentialgeometrie der Äquiaffinitäten betrachtet man bekanntlich neben dem affinen Punktraum α , dessen Elemente durch Ortsvektoren dargestellt werden, den Vektorraum V der Translationen über α , der etwa die Tangentenvektoren und den Affinnormalenvektor einer Hyperfläche enthält, und den Raum der Kovektoren über V . Charakteristisch für die dreidimensionale Äquiaffine Geometrie ist, daß das alternierende Produkt zweier Elemente a und b aus V in invarianter Weise mit einem Kovektor $[a, b]$ identifiziert werden kann. Es sei nun $\varphi(u^i)$ der Ortsvektor eines regulären Flächenstückes F der Klasse C^5 . Wir setzen $L_{ik} = (\varphi_1, \varphi_2, \varphi_{ik})$, $\det(L_{ik}) = L$; es gelte $L \neq 0$ auf ganz F . Der $\varphi(u^i)$ Äquiaffininvariant zugeordnete Normalenkovektor

$$(8.1) \quad \nu = \frac{[\varphi_1, \varphi_2]}{|\sqrt{L}|}$$

legt die Tangentialebenen von F fest; $\nu(u^i)$ ist von der Klasse C^3 . Zwischen ν und dem euklidischen Normalenvektor u besteht die Beziehung

$$(8.2) \quad \nu = |K|^{-\frac{1}{4}} u;$$

13) vgl. [4], S. 152 ff; [14], S. 141 ff.

dabei ist K die Gaußsche Krümmung.

Als Maßtensor dient jetzt

$$(8.3) \quad g_{ik} = \langle \nu, \varphi_{ik} \rangle = - \langle \nu_k, \varphi_i \rangle ;$$

auf ihn sind in den §§ 8 - 10 die kovariante Differentiation und der Diskriminantentensor bezogen. Auf einer elliptisch gekrümmten Fläche werde das Vorzeichen von ν so gewählt, daß g_{ik} positiv definit ist.

Man bezeichnet

$$(8.4) \quad \eta = \frac{1}{2} g^{ik} \varphi_{ik}$$

als Affinnormalenvektor. Zwischen ν und η bestehen die Relationen

$$(8.5) \quad \langle \nu, \eta \rangle = 1, \quad \langle \nu_i, \eta \rangle = \langle \nu, \eta_i \rangle = 0,$$

d. h. ν ist Normalenkovektor von η bezüglich der radialaffinen Flächentheorie (vgl. (6.1)). Wie man aus den Formeln (8.1, 3, 5) ersehen kann, hat der Diskriminantentensor von g_{ik} die Gestalt

$$(8.6) \quad \varepsilon_{ik} = (\eta, \varphi_i, \varphi_k).$$

Durch

$$(8.7) \quad a_{ikl} = - \langle \varphi_l, \varphi_{ik} \rangle = \langle \nu, \varphi_{ikkl} \rangle,$$

$$(8.8) \quad b_{ik} = \langle \nu_i, \eta_k \rangle$$

sind zwei symmetrische Tensoren gegeben. b_{ik} ist gleichzeitig Maßtensor von η in bezug auf die radialaffine Differentialgeometrie (vgl. (6.2)).

Die Ableitungsgleichungen lauten jetzt:

$$(8.9) \quad \varphi_{ink} = a_{ik}^l \varphi_l + g_{ik} \eta$$

$$(8.10) \quad v_{i||k} = -a_{ik}^{\ell} v_{\ell} - b_{ik} v ,$$

$$(8.11) \quad \eta_i = -b_i^{\ell} v_{\ell} .$$

In Analogie zur euklidischen Flächentheorie bezeichnet man die Invarianten

$$k = \frac{1}{2} b^{ik} b_{ik} = \lambda_1 \cdot \lambda_2 ,$$

$$h = \frac{1}{2} g^{ik} b_{ik} = \frac{1}{2} (\lambda_1 + \lambda_2)$$

als affines Krümmungsskalar und mittlere Affinkrümmung; λ_1 und λ_2 heißen die affinen Hauptkrümmungen. Zwischen k und dem affinen Stützabstand $\tilde{g}$ von η besteht die Beziehung (vgl. (6.10))

$$(8.12) \quad \tilde{g}^4 = \frac{(\eta, \eta_1, \eta_2)^2}{|\det(b_{ik})|} = |k| ,$$

die man leicht aus (8.11), (8.6) und (8.8) herleitet.

Wir führen noch den Tensor

$$k_{ik} = \frac{1}{2} (\varepsilon_i^{\ell} b_{\ell k} + \varepsilon_k^{\ell} b_{i \ell})$$

ein; k_{ik} ist der Netztensor der Affinkrümmungslinien. Es gilt

$$(8.13) \quad k^{ik} k_{ik} = 2(h^2 - k) .$$

Jetzt geben wir die Integrabilitätsbedingungen an:

$$(8.14) \quad g^{ik} a_{ik\ell} = 0 ,$$

$$(8.15) \quad \varepsilon^{\ell k} a_{ij\ell||k} = k_{ij} ,$$

$$(8.16) \quad \varepsilon^{k\ell} b_{ik||\ell} = -\varepsilon^{k\ell} a_{ki}^{\alpha} b_{\alpha\ell} ,$$

$$(8.17) \quad s = j + h .$$

Dabei ist s die Skalarkrümmung von g_{ik} und $j = \frac{1}{2} a_{ikl} a^{ikl}$.

Man kann (8.16) umformen zu

$$(8.18) \quad \epsilon^{kl} k_{ikll} = h_i - \epsilon_{il} a^{mnl} k_{mn} ,$$

und da h und k_{ik} mit Hilfe von (8.17) und (8.15) durch nur von g_{ik} und a_{ikl} abhängige Größen ausdrückbar sind, reduzieren sich die Integrabilitätsbedingungen auf die zwei Gleichungen (8.14) und (8.18), die g_{ik} und a_{ikl} in Relation setzen.

Es gilt der Eindeutigkeitssatz: Zwei Flächenstücke, die auf dieselben Parameter bezogen sind und in den Fundamentaltensoren g_{ik} und a_{ikl} übereinstimmen, gehen durch eine äquifforme Abbildung auseinander hervor.

Nun wenden wir uns speziellen Flächenklassen zu. Die Flächen, auf denen $k_{ik} \equiv 0$ gilt, heißen Affinsphären; sie sind geometrisch auch dadurch gekennzeichnet, daß die Affinnormalen $p(u^i) + t q(u^i)$ durch einen festen Punkt gehen (eigentliche Affinsphären) oder parallel sind. Unter den Affinsphären sind die Flächen zweiter Ordnung durch $a_{ikl} \equiv 0$ ausgezeichnet (Satz von Maschke), und die einzigen geschlossenen Flächen dieser Art sind die Ellipsoide.

§ 9 Einige Kennzeichnungen der Ellipsoide

Es sei $\mathfrak{F}$ die Klasse der mindestens fünfmal stetig differenzierbaren Eiflächen. Im folgenden untersuchen wir differentialgeometrische Eigenschaften, durch welche die Ellipsoide unter den Flächen der Klasse $\mathfrak{F}$ gekennzeichnet werden.

Zunächst geben wir Satz 1 (§ 7) in der ursprünglichen Formulierung von Blaschke wieder, um daran Verallgemeinerungen, die der äquiaffinen Differentialgeometrie angehören, anzuschließen.

Satz. Jede affinsphärische Fläche F aus $\mathfrak{F}$ ist ein Ellipsoid.

Da auf einer affinsphärischen Fläche $k_{ik} = 0$ gilt, folgt der Satz auch unmittelbar aus den Formeln (8.14, 15) in Verbindung mit Satz I g.

Blaschke¹⁴⁾ gewinnt dieses Resultat, indem er für geschlossene affinsphärische Flächen die Differentialgleichung $\Delta \log j = 6s$ (für $j > 0$) und die Ungleichung $s > 0$ herleitet und daraus auf die Unmöglichkeit eines von Null verschiedenen Maximums der Größe j schließt. Bei Kenntnis der Ungleichung $s > 0$ kann das genannte Resultat wegen $j \geq 0$ auch aus folgendem Satz geschlossen werden.

Satz 4. Für jede Fläche F der Klasse C^5 aus $\mathfrak{F}$ gilt die Ungleichung

$$(9.1) \quad \int_F (h^2 - k) d\sigma \geq \frac{3}{2} \int_F s j d\sigma.$$

14) vgl. [4], S. 212.

Gleichheit besteht nur dann, wenn F ein Ellipsoid ist.

Beweis: Wegen (8.14) kann die Integralformel (3.6) auf a_{ikl} angewendet werden:

$$(9.2) \quad \int_F \varepsilon^{ik} \varepsilon^{lm} a_{l \parallel i}^{j_1 j_2} a_{m j_1 j_2 \parallel k} d\sigma = 6 \int_F s_j d\sigma.$$

Es ist nun nach (8.15) $a_{m j_1 j_2 \parallel k} = \varepsilon_{mk} k_{j_1 j_2} + a_{k j_1 j_2 \parallel m}$, und also wird der Integrand der linken Seite von (9.2) zu

$$k^{j_1 j_2} k_{j_1 j_2} + \varepsilon^{ik} \varepsilon^{lm} a_{l \parallel i}^{j_1 j_2} a_{k j_1 j_2 \parallel m}.$$

Durch Anwendung der Identität (1.1) erhält man bei Beachtung von

$$g^{km} a_{k j_1 j_2 \parallel m} = \varepsilon_{j_1}^r k_r j_2$$

schließlich

$$\begin{aligned} & \varepsilon^{ik} \varepsilon^{lm} a_{l \parallel i}^{j_1 j_2} a_{m j_1 j_2 \parallel k} = \\ & = 4(h^2 - k) - g^{kl} a_{j_1 j_2 j_3 \parallel k} a_{j_1 j_2 j_3 \parallel l} \leq 4(h^2 - k), \end{aligned}$$

womit die Ungleichung (9.1) bewiesen ist.

Gilt dort das Gleichheitszeichen, so folgt $a_{ikl \parallel j} \equiv 0$ und daraus $j = \text{konst.}$ Da nach dem Satz von Poincaré a_{ikl} auf F Nullstellen besitzt, ergibt sich dann $j \equiv 0$.

Satz 4'. Jede analytische Fläche aus $\mathcal{F}$, auf der $h^2 - k \leq p j$ für eine Konstante p gilt, ist ein Ellipsoid.

Dies folgt unmittelbar aus Satz I' und den Formeln (8.14, 15).

Der nächste Satz von Blaschke hängt eng mit dem isoperimetrischen Problem in der affinen Geometrie zusammen. Er wurde schon mit Hilfe der Steiner'schen Symmetri-

sierung¹⁵⁾ oder der M i n k o w s k i schen Integralformeln¹⁶⁾ behandelt oder auf den Starrheitssatz für Eiflächen¹⁷⁾ zurückgeführt. Der analoge Satz der euklidischen Flächentheorie stammt von L i e b m a n n .

Satz 5. Jede Fläche F aus $\mathcal{F}$ mit konstanter mittlerer Affinkrümmung h ist ein Ellipsoid.

Beweis: Wegen $h_i = 0$ geht (3.18) über in

$$\varepsilon^{kl} k_{ikll} = -\varepsilon_{il} a^{lnm} k_{nm}.$$

Außerdem gilt $g^{ik} k_{ik} = 0$. Also verschwindet k_{ik} nach Satz Ig identisch, d. h. F ist eine Affinsphäre und damit ein Ellipsoid.

Beschränkt man sich auf analytische Flächen, so ist folgende Verallgemeinerung möglich, durch die gewisse Ergebnisse von C h e r n [5] und H o p f [12] in die affine Flächentheorie übertragen werden.

Satz 5'. Eine analytische Fläche F aus $\mathcal{F}$, auf der jede Nullstelle P von k_{ik} (Affinnabel) eine Umgebung besitzt, in der

$$(h - h(P))^2 \leq r(h^2 - k)$$

mit einer Konstanten r , $r < 1$,

15) vgl. [4], S. 201

16) vgl. [9]

17) vgl. [4], S. 214

gilt, ist ein Ellipsoid.

Korollar. Besteht auf einer analytischen Fläche aus $\mathfrak{F}$ zwischen den affinen Hauptkrümmungen λ_1, λ_2 eine stetig differenzierbare Relation $g(\lambda_1, \lambda_2) = 0$ mit

$$\frac{\partial g(x,y)}{\partial x} \cdot \frac{\partial g(x,y)}{\partial y} > 0,$$

so ist F ein Ellipsoid.

Beweis: Wegen (3.16) ist Satz IIg auf $b_{ik} du^i du^k$ anwendbar; aus $b_{ik} = h g_{ik}$ folgt $k_{ik} = 0$. F ist also eine Affinsphäre und damit ein Ellipsoid.

Bemerkenswert ist, daß bei Satz 5' nichts über die Vorzeichen von h und k vorausgesetzt ist (vgl. § 11, Satz 7). Das entsprechende Resultat von Hopf ist ein Analogon des Korollars; jedoch ist eine Übertragung von Satz 5' in die euklidische Flächentheorie leicht möglich.

§ 10 Eine Starrheitseigenschaft des Ellipsoids

Durch $\varphi(u^i, t) = \varphi(u^i) + t \psi(u^i)$ ist eine Deformation der Fläche $F(\varphi(u^i))$ gegeben. Es sei T irgendein Tensor oder Skalar auf F ; wir setzen $\dot{T} = \frac{\partial T(u^i, t)}{\partial t} \Big|_{t=0}$. Eine Größe mit $\dot{T} \equiv 0$ heiße stationär.

Wir untersuchen zunächst eine Deformation, bei welcher der Maßtensor g_{ik} der äquiaffinen Flächentheorie und damit auch ε_{ik} stationär ist. Dazu setzen wir an:

$$(10.1) \quad \dot{\eta} = A \eta, \quad \dot{\varphi}_i = A \varphi_i,$$

wobei A eine von den u^i abhängige eindeutig bestimmte Matrix ist. Jetzt folgt aus (8.6)

$$0 = \dot{\varepsilon}_{ik} = (\dot{\eta}, \varphi_i, \varphi_k) + (\eta, \dot{\varphi}_i, \varphi_k) + (\eta, \varphi_i, \dot{\varphi}_k)$$

und hieraus $\dot{\varepsilon}_{ik} = \text{Spur}(A) \varepsilon_{ik}$ und $\text{Spur}(A) = 0$. Die drei Vektoren $\varphi_i, \varphi_k, \eta$ in einem Punkt von F sind also mit dem entsprechenden Dreibein einer Nachbarfläche durch eine lineare Transformation verbunden, die äquiaffin ist bis auf Glieder quadratischer und höherer Ordnung in t .

Nun seien g_{ik} und a_{ikl} stationär; dann gilt wegen (8.15, 17) auch $\dot{b}_{ik} \equiv 0$. Aus (10.1) und (8.9, 11) erhalten wir

$$(A \varphi_i)_{||k} = \dot{\varphi}_{i||k} = A \varphi_{i||k},$$

$$(A \eta)_{||k} = \dot{\eta}_k = A \eta_k$$

und hieraus $A_k \varphi_i = 0 = A_k \eta$ oder $A_k = 0$. Also ist

$\dot{\varphi} = A \varphi + \tau$ mit konstantem A und τ . Zusammengefaßt ergibt sich

eine infinitesimale Flächen-deformation, bei der g_{ik} und a_{ikl} stationär sind, wird durch eine infinitesimale äquiaffine Transformation des einbettenden Raumes induziert.

Wir wollen eine Fläche, auf der jede Deformation mit $\dot{g}_{ik} \equiv 0$ auch a_{ikl} stationär läßt, äquiaffin starr nennen.

Der folgende Satz geht auf B l a s c h k e zurück.

Satz 6. Eine infinitesimale Deformation eines Ellipsoids, bei der $\dot{s} \equiv 0$ gilt, läßt a_{ikl} stationär.

Korollar. Das Ellipsoid ist äquiaffin starr.

Beweis: Auf einem Ellipsoid verschwinden a_{ikl} und k_{ik} ; insbesondere gilt $\dot{j} \equiv 0$ für jede Deformation. Es folgt $\dot{h} = \dot{s} - \dot{j} = 0$. Aus $k_{ik} \equiv 0$ und (8.18) ergibt sich nun

$$\epsilon^{kl} \dot{k}_{ikll} = (\epsilon^{kl} k_{ikll})^{\circ} = 0$$

und

$$g^{ik} \dot{k}_{ik} = (g^{ik} k_{ik})^{\circ} = 0$$

und durch Anwendung von Satz I_g^{*} gewinnt man $\dot{k}_{ik} \equiv 0$. Weiter folgt aus (8.14, 15)

$$\epsilon^{lm} \dot{a}_{ikllm} = (\epsilon^{lm} a_{ikllm})^{\circ} = \dot{k}_{ik} = 0,$$

$$g^{ik} \dot{a}_{ikl} = (g^{ik} a_{ikl})^{\circ} = 0$$

und hieraus unter nochmaliger Benutzung von Satz I_g^{*}

$$\dot{a}_{ikl} \equiv 0.$$

In [3] betrachtet B l a s c h k e Deformationen des Einheitsellipsoids ($s = 1$), bei denen $\dot{\varphi} = p \eta$ (p ist skalar) und $\dot{s} = 0$ gilt. Mit Hilfe der Vollständigkeits- und Orthogonalitätsrelationen der Kugelfunktionen zeigt er, daß p die Gestalt $p = p_1 + p_2$ besitzt, wobei die Differentialgleichungen $\Delta p_1 + 2p_1 = 0$ und $\Delta p_2 + 6p_2 = 0$ bestehen.

Diesem Resultat gibt er eine geometrische Interpretation, die etwas allgemeiner ist als Satz 6.

§ 11 Die Anwendungen eines Satzes von M i n k o w s k i
in der affinen Geometrie

Nach M i n k o w s k i [24] ist eine Fläche bis auf Translationen durch Vorgabe der Gaußschen Krümmung als Funktion des euklidischen Normalenvektors eindeutig bestimmt. Wegen (8.2) und, da ν und η sich nach (8.5, 8) gegenseitig eindeutig bestimmen, wenn $k \neq 0$ gilt, kann in diesem Fall bekanntlich jener Satz folgendermaßen affingeometrisch gedeutet werden:

E i n e F l ä c h e F a u s $\mathcal{E}$ i s t d u r c h i h r A f f i n n o r m a l e n b i l d N b i s a u f T r a n s l a t i o n e n f e s t g e l e g t .

Als Spezialfall hiervon ergibt sich: M i t N i s t a u c h F e i n E l l i p s o i d . Wenn man diese Resultate mit den Ergebnissen im Großen der radial-affinen Geometrie kombiniert, indem man jene auf das Affinnormalenbild anwendet, gewinnt man weitere interessante Eindeutigkeitssätze.

So folgt wegen (8.12) aus Satz 1 folgendes Resultat von Blaschke:

Satz 7. J e d e F l ä c h e a u s $\mathcal{E}$ m i t k o n s t a n t e m p o s i t i v e m A f f i n -

krümmungsmaß k ist ein Ellipsoid¹⁸⁾.

Beschränkt man sich auf analytische Flächen, dann ist dieses Ergebnis in Satz 5' enthalten.

Weiter erhält man aus Satz 2 :

Satz 8. Unter den analytischen Flächen aus $\mathcal{F}$ sind die Ellipsoide allein durch den Tensor b_{ik} gekennzeichnet.

Es ist uns nicht bekannt, ob ein entsprechendes Resultat für g_{ik} gilt.

Schließlich gewinnen wir aus Satz 3 wegen (8.12) und (6.11) noch

Satz 9. Es seien F und $\hat{F}$ zwei auf die gleiche Parametermannigfaltigkeit bezogene Flächen aus $\mathcal{F}$. Gilt dann in entsprechenden Punkten $b_{ik} = \hat{b}_{ik}$ und $k = \hat{k} > 0$ mit konstantem $c > 0$, so geht $\hat{F}$ aus F durch eine Affinität hervor.

18) vgl. Blaschke [2], S. 34.

§ 12 Einfache Beweise des Satzes von M i n k o w s k i und verwandter Ergebnisse

Die hier dargestellten bekannten Resultate der euklidischen Flächentheorie ergeben sich auch unmittelbar aus den Sätzen von § 5.

Wir betrachten reguläre elliptisch gekrümmte Flächenstücke der Klasse C^3 im dreidimensionalen euklidischen Raum; der Normalenvektor ist gegeben durch

$$n = \frac{[\varphi_1, \varphi_2]}{|[\varphi_1, \varphi_2]|}.$$

Das Heben und Senken der Indizes sowie die kovariante Differentiation beziehen wir hier auf den Tensor $E_{ik} = \langle u_i, u_k \rangle$ den sogenannten dritten Fundamentaltensor der euklidischen Differentialgeometrie; der Diskriminantentensor hat die Gestalt $\varepsilon_{ik} = \langle n, u_i, u_k \rangle$. Der zweite Fundamentaltensor $B_{ik} = -\langle \varphi_i, u_k \rangle$ genügt auch jetzt den C o d a z z i schen Gleichungen

$$(12.1) \quad \varepsilon^{lk} B_{ik} u_l = 0 ;$$

es gilt nämlich

$$(12.2) \quad \varphi_l = -B_l^m u_m, \quad u_{lik} = -E_{ik} u_l$$

und also

$$0 = \varepsilon^{lk} \varphi_{lik} = \varepsilon^{kl} B_l^m u_{mk}.$$

Die Eigenwerte von B_{ik} bezüglich E_{ik} sind gerade die Hauptkrümmungsradien r_1, r_2 ; es ist also

$$E^{ik} B_{ik} = \frac{2H}{K} = r_1 + r_2,$$

$$\underline{B}^{ik} B_{ik} = \frac{2}{K} = 2r_1 r_2,$$

wobei K und H Gaußsche und mittlere Krümmung bedeuten.

Bei den folgenden Sätzen seien F und $\hat{F}$ zwei auf die gleiche Parameterrmannigfaltigkeit bezogene elliptisch gekrümmte geschlossene Flächen der Klasse C^3 , die in entsprechenden Punkten denselben Normalenvektor besitzen; dann gilt $E_{ik} = \hat{E}_{ik}$. Außerdem seien F und $\hat{F}$ so orientiert, daß B_{ik} und $\hat{B}_{ik}$ positiv definit sind. Wir bemerken noch, daß sich aus $B_{ik} = \hat{B}_{ik}$ wegen (12.2) $\epsilon_i = \hat{\epsilon}_i$ und damit die Translationsgleichheit von F und $\hat{F}$ ergibt.

Satz 10 (Minkowski [24]). Gilt für entsprechende Punkte von F und $\hat{F}$ $r_1 r_2 = \hat{r}_1 \hat{r}_2$, so sind F und $\hat{F}$ translationsgleich.

Beweis: Der Tensor $\underline{B}^{ik} + \hat{\underline{B}}^{ik}$ ist positiv definit; die obige Behauptung folgt jetzt wegen (12.1) und

$$(\underline{B}^{ik} + \hat{\underline{B}}^{ik})(B_{ik} - \hat{B}_{ik}) = 2\left(\frac{1}{K} - \frac{1}{\hat{K}}\right) = 0$$

aus Satz Ig.

Satz 11 (Christoffel [23]). Gilt für entsprechende Punkte von F und $\hat{F}$ $r_1 + r_2 = \hat{r}_1 + \hat{r}_2$, so sind F und $\hat{F}$ translationsgleich.

Beweis: Diese Behauptung folgt aus (12.1) und

$$E^{ik}(B_{ik} - \hat{B}_{ik}) = 2\left(\frac{H}{K} - \frac{\hat{H}}{\hat{K}}\right) = 0$$

bei Benutzung des Satzes Ig*.

Satz 12 (A l e k s a n d r o w [1]). Sind F und $\hat{F}$ analytisch und gilt $(r_1 r_2 - \hat{r}_1 \hat{r}_2)(r_1 + r_2 - \hat{r}_1 - \hat{r}_2) \leq 0$, so sind F und $\hat{F}$ translationsgleich.

Beweis: Wegen (12.1) und

$$(\hat{B}_{ik} + B_{ik})(B_{ik} - \hat{B}_{ik}) E^{lm}(B_{lm} - \hat{B}_{lm}) \leq 0$$

ist Satz I" auf $B_{ik} - \hat{B}_{ik}$ anwendbar.

§ 13 Abschließende Bemerkungen

Zunächst sei darauf hingewiesen, daß auch der Satz von C h r i s t o f f e l eine affine Interpretation erlaubt. Für ihn und den Satz von M i n k o w s k i gibt dementsprechend S ü s s in [19] Beweise an, bei welchen die affine Differentialgeometrie nicht verlassen wird.

Derselbe Autor zeigt in den Arbeiten [16] und [17], daß es sich bei den L i e b m a n n s c h e n und B l a s c h k e s c h e n Kennzeichnungen der Kugeln und Ellipsoide durch euklidische und affine Krümmungsinvarianten um Spezialfälle allgemeiner Resultate über die Homothetie von Eiflächen, die durch parallele Tangentialebenen aufeinander bezogen sind, handelt.

Diese Ergebnisse gehören in den Rahmen der relativen Differentialgeometrie. Auch der auf H o p f zurückgehende Beweis des C h e r n schen H-K-Satzes, der mit Hilfe der Indexmethode arbeitet, läßt sich genauso zu einem Homothetiesatz der relativen Flächentheorie verwenden, wie es hier bei Satz 5' für eine Eifläche und ihr Affinnormalenbild durchgeführt wurde. Die Formeln (22) und (23) in [15], S. 258 - 259, gestatten nämlich die Anwendung von Satz IIg, wenn die Ausgangsfläche eine Eifläche ist; während beim euklidischen Spezialfall des so erhaltenen allgemeinen Resultates die Homothetie von Fläche und Normalenbild unmittelbar die Kugeln charakterisiert, führt die analoge Bedingung in der Äquiaffinen Geometrie zunächst auf die Affinsphären und erst in Verbindung mit einem weiteren Satz im Großen zur Kennzeichnung der Ellipsoide.

L i t e r a t u r

- [1] A l e k s a n d r o w , A. D.: Sur les théorèmes d'unicité pour les surfaces fermées, Comptes Rendus (Doklady), URSS, 22, 99 - 102 (1939).
- [2] B l a s c h k e , W.: Von den Eiflächen, Ber. Ges., Leipzig 70, 18 - 37 (1918).
- [3] B l a s c h k e , W.: Ein affines Gegenstück zur Unverbiegbarkeit der Kugel, Hamb. Abh. 1, 151 - 156 (1922).
- [4] B l a s c h k e , W.: Affine Differentialgeometrie, Berlin 1923.
- [5] C h e r n , S. S.: Some new charakterisations of the Euklidean sphere, Duke math. J. 12, 270 - 290 (1945).
- [6] C o h n - V o s s e n , St.: Zwei Sätze über die Starrheit der Eiflächen, Göttinger Nachr., 125 - 134 (1927).
- [7] E i s e n h a r t , L. P.: Riemannian Geometrie, Princeton 1926.
- [8] E f i m o w , N. W.: Flächenverbiegung im Großen, mit einem Nachtrag von E. Rembs und K. P. Grotemeyer, Berlin 1957.
- [9] G r o t e m e y e r , K. P.: Die Integralsätze der affinen Flächentheorie, Arch. d. Math. 3, 38 - 43 (1952).
- [10] G r o t e m e y e r , K. P.: Ein Satz aus der Differentialgeometrie der Eiflächen, Arch. d. Math. 6, 403 - 407 (1955).
- [11] G r o t e m e y e r , K. P.: Zur Flächentheorie im Großen II, Arch. d. Math. 9, 382 - 388 (1958).
- [12] H o p f , H.: Über Flächen mit einer Relation zwischen den Hauptkrümmungen, Math. Nachr. 4, 232 - 249 (1951).
- [13] H o p f , H. und S a m e l s o n , H.: Zum Beweis des Kongruenzsatzes für Eiflächen, Math. Zeitschr. 43, 749 - 766 (1938).

- [14] S a l k o w s k i , E.: Affine Differentialgeometrie, Berlin und Leipzig 1934.
- [15] S i r o k o w , P. A. und A. P.: Affine Differentialgeometrie, Moskau 1959.
- [16] S ü s s , W.: Über Eiliniien und Eiflächen in der elementaren und affinen Differentialgeometrie, Japan. Journ. Math. 4, 57 - 75 (1927).
- [17] S ü s s , W.: Eine relativgeometrische Erweiterung der affinen Differentialgeometrie, Proceed. Imp. Acad. 4, 38 - 40 (1928).
- [18] S ü s s , W.: Bestimmung einer geschlossenen konvexen Fläche durch die Gaußsche Krümmung, Sitzungsber. Preuß. Akad., Berlin, 1 - 12 (1931).
- [19] S ü s s , W.: Eindeutigkeitssätze und ein Existenztheorem der Eiflächen im Großen, Tohoku Math. Journ. 35, 290 - 293 (1932).
- [20] V e k u a , I. N.: Systeme von Differentialgleichungen erster Ordnung vom elliptischen Typ, Berlin 1956, S. 19 - 20.
- [21] V o s s , K.: Über geschlossene Weingartensche Flächen, Math. Ann. 138, 180 - 218 (1959).
- [22] V o s s , K.: Über eine spezielle Klasse von Nabelpunkten, Comm. Math. Helv. 33, 81 - 88 (1959).
- [23] C h r i s t o f f e l , E. B.: Über die Bestimmung der Gestalt einer krummen Fläche durch lokale Messungen auf derselben. J. reine u. angew. Math. 64, 193 - 209 (1865).
- [24] M i n k o w s k i : Volumen und Oberfläche, Math. Ann. 57, 447 - 495 (1903).

Lebenslauf

Als zweites Kind des Dozenten Dr. Hans Münzner und seiner Ehefrau, geb. Rothenbach, wurde ich, Hans-Friedrich Münzner, am 14. 5. 1938 in Göttingen geboren. Ich besitze die deutsche Staatsangehörigkeit und bin evangelisch lutherisch getauft.

Vom Herbst 1944 bis Ostern 1948 besuchte ich in Göttingen die Volksschule und anschließend das Max-Planck-Gymnasium, wo ich Ostern 1957 die Reifeprüfung ablegte.

Sei dem Sommersemester 1957 studiere ich an der Freien Universität Berlin Mathematik, Physik und Philosophie.

Nach der Diplomvorprüfung im Frühjahr 1960 wandte ich mich vorwiegend der Differentialgeometrie und der Topologie zu.

Ich besuchte Vorlesungen der Professoren Dinghas, Gollwitzer, Grotemeyer, Henrich, Hübner, Honerjäger, Kanthack, Lassen, Levi, Ludwig, Meschkowski, Ostmann, Pachale, Ringel, Stöhr und Weischedel.

Besonders danke ich Herrn Professor Dr. K.P. Grotemeyer für die Anregung zu dieser Arbeit und wertvolle Hinweise sowie Herrn Prof. Dr. A. Dinghas für mehrere Verbesserungsvorschläge.

